TREBALL DE FINAL DE GRAU

Grau en Matemàtiques
Grau en Enginyeria Física

Títol: La funció conjugada i la transformada de Hilbert

Autor: Damià Torres Latorre

Supervisor: Santiago Boza Rocho

Departament: Matemàtica Aplicada

Data: Maig 2019

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Centre de Formació Interdisciplinària Superior

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

telecos BCN

Universitat Politècnica de Catalunya

Treball Final de Grau

La funció conjugada i la transformada de Hilbert

Autor:
Damià Torres Latorre

Supervisor:
Dr. Santiago Boza Rocho

Maig 2019

Abstract

Keywords: Hilbert transform, conjugate function, Fourier analysis, harmonic analysis

MSC2000: 42A50, 44A15

In this thesis, we study the Hilbert transform for functions of real variable and its counterpart for periodic functions, also called the conjugate function. We show the three main approaches to the operator: as a multiplier from the point of view of the Fourier transform (or series), as a singular integral of convolution type and as the boundary value of the harmonic conjugate of a given harmonic function with a certain boundary.

In the first chapter, we remember some classical results on harmonic analysis, Fourier analysis and norm inequalities that will be needed later.

The second chapter is devoted to the periodic case. We define the conjugate function, it is shown that the conjugation is a bounded operator in L^p for $1 < p < \infty$, and hence the convergence in norm of the Fourier series is obtained. Then we show the equivalence of the definition to the boundary value of the conjugate harmonic function on the disk, and finally establish the equivalence to the singular convolution integral.

In the last chapter, we define the Hilbert transform in the Fourier transformed domain, derive the same results of convergence and show the equivalence to the definition as the boundary value of the harmonic conjugate in the upper half-plane, and as a singular integral. The boundedness in L^p of the Hilbert transform represents the easiest case of singular integral in the one dimensional case.

Índex

1 Introducció i preliminars **1**

1.1 Introducció i objectius del treball 1

1.2 Espais L^p i convergència en norma 1

1.2.1 La funció de distribució 3

1.2.2 Acotació forta i feble d'operadors 4

1.3 Convolucions i aproximacions de la identitat 5

1.3.1 Aproximacions de la identitat 6

1.4 El teorema d'interpolació de Marcinkiewicz 9

1.5 L'operador maximal de Hardy-Littlewood 10

1.6 El teorema de diferenciació de Lebesgue 11

1.7 La descomposició de Calderón-Zygmund a $\mathbb{R}$ 13

1.8 Sèries de Fourier 14

1.9 La classe de Schwartz 17

1.10 La transformada de Fourier 19

1.10.1 Distribucions temperades i les seves transformades de Fourier 22

1.11 Funcions holomorfes i harmòniques 23

1.11.1 Funcions holomorfes 23

1.11.2 Funcions harmòniques a $\mathbb{R}^2$ 23

2 La funció conjugada **27**

2.1 Introducció 27

2.2 Acotació en norma de la funció conjugada 28

2.3 Convergència de les sumes parcials de la sèrie de Fourier 29

2.4 La funció conjugada harmònica i el nucli de Poisson 32

2.4.1 Funcions harmòniques al disc i nucli de Poisson 32

2.4.2 El teorema de Fatou al disc 34

2.4.3 La funció conjugada harmònica al disc i el nucli conjugat de Poisson . . . 37

2.4.4 Acotació de la conjugada harmònica 38

2.5 La conjugació com a operador integral singular 42

3 La transformada de Hilbert **47**

3.1 Introducció 47

3.2 Acotació en norma de la transformada de Hilbert 48

3.3 Convergència de la transformada inversa de Fourier 50

3.4 La transformada de Hilbert com a integral singular 52

3.5 Relació amb el nucli de Poisson conjugat 57

Bibliografia **61**

Capítol 1

Introducció i preliminars

1.1 Introducció i objectius del treball

La transformada de Hilbert, tant en el cas periòdic on l'anomenarem funció conjugada, com per funcions definides a la recta, és un dels operadors més importants en l'anàlisi harmònica. En aquest treball tractarem els tres exemples paradigmàtics on apareix aquest operador i veurem la seva acotació als espais L^p i l'equivalència de les diferents definicions:

En primer lloc, la transformada de Hilbert correspon a la multiplicació per $-i\,\mathrm{sgn}(\omega)$ al domini freqüencial. Això te aplicacions directes a la teoria del senyal, ja que fent combinacions lineals d'una funció i la seva transformada podem separar les freqüències positives i les negatives. En el cas periòdic, aquest multiplicador serà $-i\,\mathrm{sgn}(m)$, amb m enter, i a partir de l'acotació en la norma de L^p d'aquest operador veurem que les sumes parcials de la sèrie de Fourier d'una funció a L^p convergeixen a la pròpia funció quan $1 < p < \infty$.

En segon lloc, la transformada de Hilbert d'una funció apareix com la condició de vora per la conjugada harmònica de la solució al problema de Dirichlet per l'equació de Laplace. És a dir, si tenim una funció harmònica amb uns valors a la vora del semiplà (o el disc en el cas periòdic), la seva conjugada harmònica pren els valors de la transformada de Hilbert (o funció conjugada) a la vora d'aquest domini.

Finalment, aquest operador és el cas més senzill possible d'integral singular en una dimensió, i serveix com a model per estudiar les integrals singulars en una dimensió.

El treball està estructurat en tres capítols. En el primer, enunciem les bases teòriques que ens permetran entrar en matèria, en el segon tractem l'operador de conjugació per funcions periòdiques i en el tercer la transformada de Hilbert per funcions de $\mathbb{R}$. En els dos capítols veiem l'acotació de l'operador al domini de la sèrie (o transformada) de Fourier i la seva relació amb la convergència de les sumes parcials. Després, en el cas del periòdic demostrem l'acotació de l'operador fent servir tècniques d'anàlisi complexa i la funció conjugada harmònica, i en el cas de la recta fent servir tècniques per integrals singulars, per il·lustrar els dos possibles camins. En tots dos capítols veiem finalment que les definicions son equivalents.

1.2 Espais L^p i convergència en norma

Els espais sobre els que definirem les nostres funcions seran, habitualment, $\mathbb{R}$ i el torus en una dimensió, $\mathbb{T}$, que identificarem amb $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com a grup additiu amb l'estructura diferencial quocient, i, si no hi ha confusió, tractarem les funcions del torus com a funcions 1-periòdiques de $\mathbb{R}$ o funcions de l'interval $[0,1]$ identificant els extrems. En aquesta secció, excepcionalment, considerarem funcions sobre un espai de mesura genèric, X, amb una mesura positiva μ.

Definició 1.2.1. Donat $0 < p < \infty$, definim $L^p(X)$ com el conjunt de funcions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ tals que la integral del seu valor absolut elevat a p és finit. Per $p = \infty$, definim $L^\infty(X)$ com el conjunt de funcions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ tals que existeix $B > 0$ tal que $\mu(\{x \in X, |f(x)| > B\}) = 0$, és a dir, fitades llevat d'un conjunt de mesura nul·la. En aquests espais, considerarem $f = g$ si i només si són iguals μ-gairebé arreu.

Definició 1.2.2.

$$||f||_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$||f||_{L^\infty(X)} = \inf\{B > 0 : \mu(\{x \in X, |f(x)| > B\}) = 0\}.$$

Quan no hi hagi risc de confusió, direm simplement $||f||_p$. És ben conegut que els espais L^p són espais vectorials i que $||.||$ és una seminorma, i una norma quan $p \geq 1$, i que les successions de Cauchy convergeixen amb aquesta mètrica. D'ara en endavant, només ens referirem al cas en que $p \geq 1$, en aquest cas, $L^p(X)$ és un espai de Banach.

És habitual definir $p' = \frac{p}{p-1}$, entenent que si $p = 1, p' = \infty$ i quan $p' = \infty, p = 1$. Anomenem p' l'exponent conjugat de p, i, quan $1 \leq p < \infty$, $L^{p'}$ és isomètricament isomorf al dual de L^p, en el sentit que per tota forma $\phi : L^p(X) \to \mathbb{C}$, existeix una única $f \in L^{p'}(X)$ tal que, per tota $g \in L^p(X)$,

$$\phi(g) = \int_X fg\mathrm{d}\mu.$$

Definició 1.2.3. Donat $0 < p < \infty$, definim $L^{p,\infty}$, anomenat L^p feble, com el conjunt de funcions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ tals que la mesura del conjunt on són més grans que una constant B decreix tan ràpid com B^{-p}, és a dir, existeix $C > 0$ tal que $\mu(\{x \in X : |f(x)| > B\}) \leq C^p/B^p$.

El mínim valor necessari de C per aquesta desigualtat s'anomena norma a L^p feble, tot i no ser una norma, i és fàcil comprovar que $L^p \subset L^{p,\infty}$, i que la inclusió és estricta. Si intentem generalitzar de forma natural aquesta definició a $p = \infty$, recuperem l'espai L^∞ original.

Definició 1.2.4. Siguin f_n, f una successió de funcions i una funció a L^p, respectivament. Direm que f_n convergeix a f en norma p si $||f_n - f||_p \to 0$.

Definició 1.2.5. Siguin f_n, f una successió de funcions i una funció a L^p, respectivament. Direm que f_n convergeix a f gairebé arreu si el conjunt de punts x tals que $\lim f_n(x)$ no existeix o és diferent de $f(x)$ té mesura nul·la.

Proposició 1.2.6. *Sigui $\{f_n\}$ una succesió de funcions a L^p que convergeixen en norma p a $f \in L^p$. Aleshores, també convergeixen gairebé arreu.*

Demostració. Sigui $m \in \mathbb{Z}^+$. Considerem el conjunt de punts tals que el límit puntual està més lluny de f que $1/m$:

$$E_m = \left\{x : \limsup |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\},$$

i sigui E el conjunt de punts on f_n no convergeix puntualment a f. És clar que $E = \cup E_m$.

$$||f_n - f|| > \frac{1}{m}\mu(E_m),$$

i per tant $\mu(E_m) = 0$ i com que és una unió numerable, $\mu(E) = 0$ com volíem veure. $\square$

Definició 1.2.7. Siguin E, F espais vectorials normats, $T : E \to F$ lineal. Anomenem la norma de l'operador T al valor $||T|| = \sup_{x \in E:||x||_E=1} ||T(x)||_F$.

1.2.1 La funció de distribució

Definició 1.2.8. Sigui $f : X \to \mathbb{C}$ una funció mesurable. Anomenem funció de distribució d_f, definida per valors $\alpha \geq 0$, com:

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

I denotarem $E_\alpha(f) = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$, simplement E_α si no hi ha risc de confusió.

Aquesta funció ens dóna informació sobre la mesura dels conjunts de nivell de f, però no de la seva localització ni del comportament local de f.

Proposició 1.2.9. *Propietats de la funció de distribució:*
Sigui $f, g : X \to \mathbb{C}$. Aleshores,

- $\forall \alpha < \beta, d_f(\alpha) \geq d_f(\beta)$.
- $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

Podem fer servir la funció de distribució per calcular la norma de les funcions de L^p.

Proposició 1.2.10. *Sigui $f \in L^p(X)$, $0 < p < \infty$. Aleshores,*

$$||f||_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) \mathrm{d}\alpha.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) \mathrm{d}\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_{E_\alpha} \mathrm{d}x \mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \int_X p\alpha^{p-1} \chi_{\{|f|>\alpha\}} \mathrm{d}x \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x = \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}x = ||f||_p^p. \end{aligned}$$

□

Proposició 1.2.11. *Donat $0 < p < \infty$, $f \in L^p(X)$,*

$$d_f(\alpha) \leq \left(\frac{||f||_p}{\alpha} \right)^p,$$

$$||f||_{L^{p,\infty}} \leq ||f||_p.$$

Demostració. Com que d_f és no creixent, podem comparar els valors que pren abans d'un cert punt α_0, i deduir

$$||f||_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) \mathrm{d}\alpha \geq p \int_0^{\alpha_0} \alpha^{p-1} d_f(\alpha_0) \mathrm{d}\alpha = \alpha_0^p d_f(\alpha_0).$$

La segona part és immediata a partir de la definició de la norma de $L^{p,\infty}$. □

1.2.2 Acotació forta i feble d'operadors

Definició 1.2.12. Siguin $(X, \mu_X), (Y, \mu_Y)$ dos espais de mesura, $0 < p, q \leq \infty$. Sigui $T : L^p(X) \to L^q(Y)$. Es diu que T és (p,q)-fort quan existeix $C > 0$ tal que, per tota $f \in L^p(X)$,

$$||Tf||_q \leq C||f||_p.$$

Recordem que un operador lineal entre espais vectorials normats està fortament fitat si i només si és continu.

Definició 1.2.13. Siguin $(X, \mu_X), (Y, \mu_Y)$ dos espais de mesura, $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$. Sigui $T : L^p(X) \to L^q(Y)$. Es diu que T és (p,q)-feble quan existeix $C > 0$ tal que, per tota $f \in L^p(X)$,

$$\mu_Y(\{x \in X : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{C||f||_p}{\alpha}\right)^q.$$

És fàcil veure que l'acotació forta implica la feble però no a la inversa. En efecte, si tenim acotació forta,

$$\mu_Y(\{x \in X : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \int_{|Tf(x)|>\alpha} \left|\frac{Tf(x)}{\alpha}\right|^q \leq \frac{1}{\alpha^q}||Tf||_q^q \leq \left(\frac{C||f||_p}{\alpha}\right)^q.$$

El següent resultat ens permet deduir resultats puntuals a partir d'acotacions febles quan els operadors son endomorfismes lineals.

Teorema 1.2.14. *Sigui $\{T_\varepsilon\}, \varepsilon > 0$, T una familia d'endomorfismes lineals de $L^p(X, \mu)$, i definim*

$$T^* f(x) = \sup_\varepsilon |T_\varepsilon f(x)|.$$

Si T^* és (p,q)-feble i T és (p,r)-feble, aleshores el conjunt

$$\mathcal{T} = \{f \in L^p(X) : \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_\varepsilon f(x) = Tf(x) \ \mu - \text{g.a.}\}.$$

és tancat a $L^p(X)$.

Demostració. Sigui $\{f_n\}$ una successió convergent de $\mathcal{T}$, i $f \in L^p$ el seu límit. Aleshores,

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X : \limsup_{\varepsilon \to 0^+} |T_\varepsilon f(x) - Tf(x)| > \alpha\}) \\
&\leq \mu(\{x \in X : \limsup_{\varepsilon \to 0^+} |T_\varepsilon(f - f_n)(x) - T(f - f_n)(x)| > \alpha\}) \\
&\leq \mu\left(\left\{x \in X : \limsup_{\varepsilon \to 0^+} |T^*(f - f_n)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : \limsup_{\varepsilon \to 0^+} |T(f - f_n)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
&\leq \left(\frac{2C}{\alpha}||f - f_n||_p\right)^q + \left(\frac{2}{\alpha}||T(f - f_n)||_r\right)^p \to 0.
\end{aligned}$$

Per tant, $\mu_X(\{x \in X : \limsup_{\varepsilon \to 0^+} |T_\varepsilon f(x) - Tf(x)| > 0\}) = 0$, ja que el conjunt es pot escriure com a unió numerable dels anteriors fent $\alpha = 1/n$ amb n enter positiu. □

1.3 Convolucions i aproximacions de la identitat

Definició 1.3.1. Donades $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, es defineix el seu producte de convolució, o simplement convolució, com:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\mathrm{d}s.$$

sempre que estigui ben definida.

Definició 1.3.2. Donades $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, es defineix el seu producte de convolució cíclica, d'ara en endavant també convolució, com:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s)\mathrm{d}s.$$

En aquesta secció, A representarà indistintament $\mathbb{R}$ o $\mathbb{T}$, ja que moltes propietats són iguals per als dos tipus de convolució. En general, de l'únic que ens haurem de preocupar a $\mathbb{T}$ és que tant 0 com 1 representen el mateix punt, i aleshores un interval centrat al 0 s'escriu $[0, r) \cup (1-r, 1)$.

Més endavant veurem la relació entre les convolucions i altres operacions, i la seva connexió amb les sèries i transformades de Fourier.

Proposició 1.3.3. *Propietats de les convolucions:*
Siguin $f, g, h : A \to \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Aleshores, sempre que estiguin ben definides,

- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$.
- $f * g = g * f$.
- $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Una de les propietats interessants de les convolucions és que, com que són integrals, suavitzen les funcions, com podem veure a continuació:

Proposició 1.3.4. *Siguin $f, g : A \to \mathbb{C}$ de manera que:*

- $h(s) \equiv g(s)f(t-s)$ *és integrable per tot* t.
- f *és derivable.*
- $|f'(t-s)g(s)| \leq q(s)$, *on* $q(s)$ *és integrable.*

Aleshores, $(f * g)'(t) = (f' * g)(t)$.

Demostració.

$$(f' * g)(t) = \int_A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(s)f(t-s)\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A g(s)f(t-s)\mathrm{d}s = (f * g)'(t).$$

Les primeres dues condicions són per assegurar que les expressions estan ben definides. La tercera és per poder aplicar el teorema de derivació sota el signe integral, que és una aplicació del teorema de la convergència dominada, i per això necessitem una fita uniforme en t sobre la funció que integrarem respecte s. $\square$

Com a cas particular important, hem de destacar que les tres condicions se satisfan si f és de classe $\mathcal{C}_0^\infty$ i g és integrable. En aquest cas, $(f * g)$ resulta ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ aplicant reiteradament el resultat.

Com a conseqüència, la convolució de dues funcions és almenys tan regular com la que ho és més de les dues, i això motiva el seu ús per *suavitzar* funcions. Intuitivament, la convolució fa la mitjana mòbil d'una funció ponderada amb l'altra, i si agafem una successió de funcions que cada vegada fa la mitjana sobre un interval menor, obtindrem aproximacions millors.

1.3.1 Aproximacions de la identitat

Definició 1.3.5. Sigui $k_\varepsilon \in L^1(A), \varepsilon > 0$ una família de funcions. Direm que és una aproximació de la identitat quan $\varepsilon \to 0^+$ si satisfà:

- És fitada, existeix $M > 0$ tal que per tot $\varepsilon > 0, ||k_\varepsilon||_1 < M$.
- Per tot $\varepsilon > 0, \int k_\varepsilon = 1$.
- Per tot complementari d'entorn del 0, la integral de $|k_\varepsilon|$ tendeix a 0.

  Si $A = \mathbb{R}$, els entorns del 0 són els conjunts que contenen un interval obert que conté el 0. Si, en canvi, $A = \mathbb{T}$, els entorns del 0 són aquells que contenen $[0, \alpha) \cup (\beta, 1], \alpha, \beta \in (0, 1)$.

Si $k_\varepsilon \geq 0$, la primera condició és redundant i la segona també es pot escriure $||k_\varepsilon||_1 = 1$. Amb aquestes tres condicions ens assegurem que la successió $k_\varepsilon * f \to f$ quan $\varepsilon \to 0^+$, en norma si $f \in L^p$ amb $p < \infty$, i uniformement sobre compactes si $f \in L^\infty$.

Un cas notable d'aproximacions de la identitat a $\mathbb{R}$ l'obtenim reescalant la mateixa funció cap al zero, en aquest sentit:

Proposició 1.3.6. *Sigui $k \in L^1(\mathbb{R})$, amb $\int k = 1$, per tot $\varepsilon > 0$, definim*

$$k_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Aleshores k_ε és una aproximació de la identitat quan $\varepsilon \to 0^+$.

Demostració. La primera i la segona son evidents, ja que $||k_\varepsilon||_1 = ||k||_1$, i $\int k_\varepsilon = \int k = 1$.

Per tot $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|t|>\delta} \frac{1}{\varepsilon} k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}t = \int_{|s|>\delta/\varepsilon} k(s)\mathrm{d}s \to 0,$$

perquè $k \in L^1$ i $\delta/\varepsilon \to \infty$. $\square$

El resultat es pot adaptar al torus identificant-lo amb l'interval $[-1/2, 1/2]$ i procedint com abans.

Lema 1.3.7. *Sigui $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(A)$. Definim la translació $T_s f(t) = f(t - s)$. Aleshores,*

$$\lim_{s \to 0} ||f - T_s f||_p = 0.$$

En altres paraules, la translació de funcions de L^p és continua respecte del desplaçament, amb la norma del propi espai.

Demostració. Primer ho demostrarem per funcions simples i després aproximarem una funció qualsevol de $L^p(A)$ per funcions simples. Sigui g una funció simple, que definim com $g = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{(l_k, r_k)}$, on a_k són constants complexes i χ_B és la funció característica del conjunt B.

$$||g - T_s g||_p \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot ||\chi_{(l_k, r_k)} - \chi_{(l_k+s, r_k+s)}||_p \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|(2s)^{1/p}.$$

On la primera és la desigualtat triangular, i a la segona observem que la diferència de la funció característica del mateix interval desplaçat s i la de l'original val ± 1 a la unió de dos intervals de longitud $\min(s, r_k - l_k)$ i 0 a la resta, i per tant la seva norma a L^p és com a molt $(2s)^{1/p}$.

Amb això hem vist que el límit de $||g - T_s g||_p$ quan $s \to 0$ és 0.

Considerem ara $f \equiv f_1 + if_2 \in L^p(A), \varepsilon > 0$, on f_1, f_2 són la part real i imaginària. Considerem la successió de funcions simples f_n, coneguda com a truncaments de f, definides com a:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}(\lfloor nf_1(x)\rfloor + i\lfloor nf_2(x)\rfloor) & \text{si } |f_1(x)| + |f_2(x)| \leq 2n, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Tenim, per tant, que $|f - f_n|^p$ és una successió decreixent de funcions integrables que convergeix puntualment a 0, i pel Teorema de la Convergència Dominada, les seves integrals convergeixen a 0. Dit d'una altra forma, podem aproximar qualsevol funció per funcions simples en norma p. Per tant, ara fent servir la desigualtat triangular i que hem provat el resultat per funcions simples,

$$||T_s f - f||_p \leq ||T_s(f - f_n)||_p + ||T_s f_n - f_n||_p + ||f_n - f||_p.$$

I el primer i el tercer membres de la suma tendeixen a 0 quan fem $n \to \infty$, i el segon quan fem $s \to 0$, i per tant $T_s f \to f$ en norma p.

□

Cal destacar que la translació no és continua per $p = \infty$, en efecte, agafant $f = \chi_{(a,b)}$ la funció característica de qualsevol interval, $||T_s f - f||_\infty = 1$ per tot $s \neq 0$.

Teorema 1.3.8. *Sigui $f : A \to X$, k_ε una aproximació de la identitat, aleshores:*

- *Si $f \in L^p(A)$, $1 \leq p < \infty$, $||f - k_\varepsilon * f||_p \to 0$.*
- *Si f és contínua a un entorn d'un compacte $K \subset A$, $||f - k_\varepsilon * f||_{L^\infty(K)} \to 0$.*

Demostració.

$$(f - k_\varepsilon * f)(x) = \int (f(x) - f(x-y))k_\varepsilon(y)\mathrm{d}y.$$

Per fer servir que k_ε és una aproximació de la identitat, separarem aquesta integral en dues parts, un entorn del zero $V = (-\delta, \delta)$, on f i la seva translació estan a prop, i V^C, on $k_\varepsilon \to 0$, i prenem normes:

$$\begin{aligned} (f - k_\varepsilon * f)(x) &= \int_V (f(x) - f(x-y))k_\varepsilon(y)\mathrm{d}y + \int_{V^C} (f(x) - f(x-y))k_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\ ||f - k_\varepsilon * f||_p &\leq \left\|\int_V (f(x) - f(x-y))k_\varepsilon(y)\mathrm{d}y\right\|_p + \left\|\int_{V^C} (f(x) - f(x-y))k_\varepsilon(y)\mathrm{d}y\right\|_p \\ &\leq \int_V ||(f - T_{-y}f)||_p M\mathrm{d}y + \int_{V^C} 2||f||_p|k_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y \\ &= M\int_V ||f - T_{-y}f||_p\mathrm{d}y + 2||f||_p \int_{V^C} |k_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

La primera de les integrals convergeix a zero en virtut del lema anterior quan fem $\delta \to 0$, i per cada valor de δ, fent $\varepsilon \to 0$ la segona tendeix a 0. Això prova el primer punt.
Si ara f és contínua a un entorn W d'un compacte K, considerem un compacte $K' \subset W$ tal que la distància de K al complementari de K' és positiva, i f hi és uniformement contínua, és a dir,

en llenguatge de normes i translacions, $||f - T_s f||_{L^\infty(K)} \to 0$ per $s \to 0$, perquè per valors prou petits de s, tant f com $T_s f$ estan evaluades a K'. Podem repetir l'argument per tant:

$$||f - k_\varepsilon * f||_{L^\infty(K)} \leq M \int_V ||f - T_{-y} f||_{L^\infty(K)} \mathrm{d}y + 2||f||_{L^\infty(K)} \int_{V^C} |k_\varepsilon(y)| \mathrm{d}y.$$

La primera integral convergeix a zero perquè $||f - T_s f||_{L^\infty(K)} \to 0$, fent $\delta \to 0$ i la segona anàlogament al cas $p < \infty$. □

Un cas típic de successió d'aproximació és que imposem que k_ε siguin $\mathcal{C}^\infty$ de suport compacte, aleshores les anomenem *mollifiers*. Un altre cas paradigmàtic, que explorarem a les seccions 1.8 i 1.10, és que les k_ε estiguin relacionades amb les sumes parcials d'una sèrie de Fourier o amb truncaments de la transformada.

Si a la definició d'aproximació de la identitat canviem la condició que la integral ha de ser 1 per qualsevol altra constant a, obtenim el que en aquest treball anomenarem aproximació generalitzada de la identitat, i amb un raonament anàleg a l'anterior,

Teorema 1.3.9. *Sigui $f : A \to X$, k_ε una aproximació generalitzada de la identitat, de manera que $\int k_\varepsilon = a$ aleshores:*

- *Si $f \in L^p(A)$, $1 \leq p < \infty$, $||af - k_\varepsilon * f||_p \to 0$.*
- *Si f és contínua a un entorn d'un compacte $K \subset A$, $||af - k_\varepsilon * f||_{L^\infty(K)} \to 0$.*

Per tancar el tema de les convolucions, introduirem dos resultats sobre acotació de convolucions. El primer és un cas particular de la clàssica desigualtat de Young, que serà suficient per als nostres propòsits:

Proposició 1.3.10. *Siguin $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^1(A), g \in L^p(A)$, aleshores*

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} ||f * g||_p &= \left\| \int_A f(s) g(t-s) \mathrm{d}s \right\|_p \leq \int_A ||f(s) g(t-s)||_p \mathrm{d}s \\ &= \int_A |f(s)| \cdot ||g(t-s)||_p \mathrm{d}s = \int_A |f| \cdot ||g||_p = ||f||_1 ||g||_p. \end{aligned}$$

On la desigualtat ve de la desigualtat triangular aplicada a la norma $||.||_p$. □

I el segon fa referència a la norma de la convolució com a operador lineal a L^1.

Proposició 1.3.11. *Sigui $f \in L^1(A), 1 \leq p \leq \infty$, $S_f : L^p(A) \to L^p(A)$ definit com a $S_f(g) = f * g$. Aleshores $||S_f|| \leq ||f||_1$, amb igualtat si $p = 1$.*

Demostració.

$$||S_f(g)||_p = ||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Amb això tenim que $||S_f|| \leq ||f||_1$ per qualsevol p.

Per l'altra desigualtat, farem servir una aproximació de la identitat. Considerem k_ε una aproximació de la identitat no negativa (per exemple la considerada a 1.8.5).

$$\begin{aligned} &||f - k_\varepsilon * f||_1 \to 0, \\ &\quad ||f * k_\varepsilon||_1 \to ||f||_1 = ||f||_1 ||k_\varepsilon||. \end{aligned}$$

Tenim per tant, que $\forall \delta > 0$, $||S_f|| \geq ||f||_1 - \delta$, i per tant $||S_f|| = ||f||_1$, com volíem veure. □

1.4 El teorema d'interpolació de Marcinkiewicz

Definició 1.4.1. Siguin X, Y espais de mesura. Anomenem $L(X), L(Y)$ els conjunts de funcions mesurables complexes sobre aquests. Direm que un operador $T : L(X) \to L(Y)$ és sublineal quan

$$|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|, \ |T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|.$$

Teorema 1.4.2. *Siguin $0 < p < q \leq \infty$, X, Y espais de mesura, T un operador sublineal definit a $L^p(X) + L^q(X)$ que pren valors a l'espai de funcions mesurables sobre Y. A més a més,*

$$||T(f)||_{L^{p,\infty}(Y)} \leq A_p||f||_{L^p(X)},$$

$$||T(f)||_{L^{q,\infty}(Y)} \leq A_q||f||_{L^q(X)}.$$

Aleshores, per tot $r \in (p, q)$, es te $||T(f)_{L^r(Y)}|| \leq A_r||f||_{L^r(X)}$, on A_r és una constant que depén de r.

Demostració. Fem primer el cas en què $q < \infty$. Considerem $f \in L^r(X)$, i la descomposem com a suma de funcions a $L^p + L^q$ separant les parts que $|f| > h$ i $|f| \leq h$, on $h > 0$ és una alçada de tall que determinarem més endavant. Com que $p < r < q$, els valors petits estaran controlats per l'alçada de tall si incrementem l'exponent, i els grans si el decrementem. Més formalment, podem definir

$$f = f\chi_{|f|>h} + f\chi_{|f|\leq h} =: f_p + f_q,$$

$$|f_p|^p \leq \frac{|f_p|^r}{h^{r-p}}, \ |f_q|^q \leq h^{q-r}|f_q|,$$

$$||f_p||_p^p \leq h^{p-r}||f_p||_r^r, \ ||f_q||_q^q \leq h^{q-r}||f_q||_r^r.$$

Com que T és sublineal, tenim $|T(f)| \leq |T(f_p)| + |T(f_q)|$, i aleshores, podem controlar els conjunts on $T(f)$ és gran en valor absolut amb els conjunts on T de cada una de les parts és gran, fent servir les funcions de distribució:

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_p)}(\alpha/2) + d_{T(f_q)}(\alpha/2).$$

Com que podem expressar $||T(f)||_r^r$ com una integral en funció de $d_{T(f)}$,

$$||T(f)||_r^r \leq r\int_0^\infty \alpha^{r-1}(d_{T(f_p)}(\alpha/2) + d_{T(f_q)}(\alpha/2))\mathrm{d}\alpha.$$

Com que aquestes últimes dues funcions pertanyen a L^p, L^q, podem aplicar les desigualtats originals per obtenir una estimació de les seves funcions de distribució, i farem $h = \alpha$:

$$\begin{aligned}
||T(f)||_r^r &\leq r\int_0^\infty \alpha^{r-1}\left[\left(\frac{A_p}{\alpha/2}\right)^p \int_{|f|>h} |f|^p \mathrm{d}x + \left(\frac{A_q}{\alpha/2}\right)^q \int_{|f|\leq h} |f|^q \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\alpha \\
&= (2A_p)^p \int_0^\infty r\alpha^{r-1}\alpha^{-p}\int_{|f|>\alpha} |f|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha + (2A_q)^q \int_0^\infty r\alpha^{r-1}\alpha^{-q}\int_{|f|\leq\alpha} |f|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha \\
&= (2A_p)^p \int_X |f|^p \int_0^{|f|} r\alpha^{r-1}\alpha^{-p}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x + (2A_q)^q \int_X |f|^q \int_{|f|}^\infty r\alpha^{r-1}\alpha^{-q}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x \\
&= (2A_p)^p \int_X |f|^p \frac{r}{r-p}|f|^{r-p} + (2A_q)^q \int_X |f|^q \frac{r}{q-r}|f|^{r-q} \\
&= ((2A_p)^p \frac{r}{r-p} + (2A_q)^q \frac{r}{q-r})||f||_r^r.
\end{aligned}$$

Notem que aquesta constant no és òptima, i es pot millorar amb una tria adequada de h, α, però per als nostres propòsits serà suficient.

$\square$

1.5 L'operador maximal de Hardy-Littlewood

Donat un subconjunt mesurable Lebesgue (d'ara en endavant, mesurable) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotem $|A| = \mu(A)$ la seva mesura. Aleshores, per una funció localment integrable, la mitjana dins d'una bola centrada a x de radi r és:

$$Avg(f;r)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y.$$

Definició 1.5.1. Donada $f : X \to \mathbb{C}$, definim $\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} Avg(|f|;r)(x)$.

Aquest operador $\mathcal{M}$ és l'operador maximal centrat de Hardy-Littlewood. És evident que $\mathcal{M}$ és un operador sublineal i positiu i que envia L^∞ a L^∞ amb norma 1. Veiem ara un resultat que farem servir més endavant i sobre el qual recauen gran part de les aplicacions que té, en la seva versió a $\mathbb{R}$:

Lema 1.5.2. *Sigui I_k una col·lecció finita d'intervals oberts a $\mathbb{R}$. Aleshores, existeix una subcol·lecció I_{k_j} d'intervals disjunts tals que*

$$\bigcup I_k \subseteq \bigcup 3I_{k_j},$$

on $3I$ és l'interval centrat al mateix lloc que I amb longitud el triple.

Demostració. Considerem els intervals ordenats en ordre de longitud decreixent. Construim la subcol·lecció afegint l'interval més llarg que no interseca amb cap dels que hi ha, i en cas d'empat el més a l'esquerra. Com que la col·lecció original és finita, el procés acaba. Ara, per veure que tots els intervals originals estan a dins del triple dels de la subcol·lecció tenim dos casos. O bé en formen part directament, o bé no els hem agafat. Si I_s no pertany a la subcol·lecció, té intersecció no buida amb un interval més llarg que ell, I_t, que estava a la subcol·lecció abans de mirar-lo, i per tant $I_s \subset 3I_t$. $\square$

Teorema 1.5.3. *$\mathcal{M}$ és un operador $(1,1)$-feble, és a dir, donada $f \in L^1$, $\mathcal{M}(f) \in L^{1,\infty}$. A més a més, $\mathcal{M} : L^p \to L^p$ és un operador fitat per $p > 1$.*

Demostració. Primer veiem el resultat a L^1. Per fer l'acotació feble de $\mathcal{M}$ ens hem de preocupar de la mesura dels conjunts $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}$, i el primer que farem serà veure que són oberts. En efecte, si $x \in E_\alpha$, $\exists r > 0, \delta > 0 : Avg(f;r)(x) = \alpha(1+\delta)$. Per tot y suficientment proper a x, si anomenem $d = |x-y|$, $Avg(f;r+d)(y) \geq \alpha(1+\delta)r/(r+d)$, perquè estem agafant tot l'interval centrat a x i més coses quan fem la mitjana. Per $d < \delta r$, aquest valor és més gran que α, i així veiem que $B(x,\delta r) \subset E_\alpha$, i per tant és obert.
Considerem K un compacte dins de E_α. Per tot $x \in K$ existeix B_x una bola centrada a x tal que la mitjana del valor absolut de $|f|$ a dins és més gran que α. Per compacitat, triem un subrecobriment finit, I_k. Ara, pel lema anterior, aquest subrecobriment està contingut a la unió dels triples d'un conjunt disjunt i finit d'intervals. Anomenem a aquest subconjunt del subrecobriment obtingut amb el lema I_{k_j}.

$$|K| \leq |\bigcup 3I_{k_j}| = 3\sum |I_{k_j}| < \frac{3}{\alpha}\int\limits_{I_{k_j}} |f| < \frac{3||f||_1}{\alpha}.$$

On hem fet servir que aquests intervals són disjunts. Una vegada ho tenim per qualsevol compacte contingut a E_α, com que existeix una seqüència creixent de compactes que convergeix en mesura a un obert a la mesura de Lebesgue, tenim que:

$$|E_\alpha| \leq \frac{3||f||_1}{\alpha}.$$

És a dir, que $\mathcal{M}$ és un operador $(1,1)$-feble. Juntament amb el fet trivial que $\mathcal{M}$ té norma 1 com a operador de L^∞ a ell mateix, podem utilitzar el teorema d'interpolació de Marcinkiewicz per assegurar que és un operador fitat de L^p a L^p, per tot $p > 1$. □

L'operador maximal ens servirà, entre altres, per obtenir acotacions d'aproximacions de la identitat i altres operadors de convolució.

Proposició 1.5.4. *Sigui $\phi \in L^1$, no negativa, radial i decreixent. Aleshores, definint $\phi_\varepsilon(t) = \phi(t/\varepsilon)/\varepsilon$,*

$$\sup_{\varepsilon>0} |\phi_\varepsilon * f(t)| \leq ||\phi||_1 \mathcal{M}f(t).$$

Demostració. Suposem que, a més a més, ϕ és una funció simple. Aleshores, podem escriure, si $B(r_k)$ és la bola de radi r_k centrada al zero,

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B(r_k)}, \; a_k > 0,$$

$$\phi * f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k |B(r_k)| \left(\frac{1}{|B(r_k)|}\chi_{B(r_k)} * f(t)\right) \leq ||\phi||_1 \mathcal{M}f(t).$$

□

On a l'última desigualtat hem fet servir que $||\phi||_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k |B(r_k)|$, i que l'expressió entre parèntesis és menor o igual que $\mathcal{M}f(t)$.

Ara, com que qualsevol funció integrable es pot aproximar de manera creixent per funcions simples, tenim la desigualtat per qualsevol funció $\phi \in L^1$. Finalment, observem que ϕ_ε és una altra funció no negativa, radial, decreixent i $||\phi_\varepsilon||_1 = ||\phi||_1$, amb la qual la desigualtat es manté.

1.6 El teorema de diferenciació de Lebesgue

Enunciarem aquest resultat per a $\mathbb{R}$. Evidentment, com que és un resultat local es pot aplicar a $\mathbb{T}$ o a qualsevol espai que tingui la mateixa estructura local.

Definició 1.6.1. Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Direm que x és un punt de Lebesgue de f si

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0.$$

Aquesta definició s'ha d'entendre com que la mitjana de la oscil·lació de f a un entorn de x tendeix a zero quan el diàmetre d'aquest entorn també hi tendeix.

Teorema 1.6.2. *Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Aleshores, el conjunt N dels punts que no són punts de Lebesgue de f te mesura nul·la.*

Demostració.

$$h(x) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y.$$

L'objectiu és veure que h és igual, excepte en un conjunt de mesura nul·la, a zero.

Considerem $K \subset \mathbb{R}$ un compacte. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, per la densitat de les funcions contínues a $L^1(K)$ podem agafar $g \in \mathcal{C}(K)$ tal que $||f - g||_{L^1(K)} < \varepsilon$.

Per la continuitat uniforme de g, tenim

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |g(y) - g(x)| \mathrm{d}y = 0.$$

Sabent això, i aplicant la desigualtat triangular, per tot $x \in K$,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |g(y) - g(x)| + |g(y) - f(y)| + |g(x) - f(x)|, \\ |h(x)| &\leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |g(y) - g(x)| + |g(y) - f(y)| + |g(x) - f(x)| \mathrm{d}y \\ &\leq \mathcal{M}(g - f)(x) + |g(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Ara, fent servir l'acotació feble de $\mathcal{M}$ i la desigualtat de Markov (en altres paraules, que $||g - f||_{L^{1,\infty}(K)} \leq ||g - f||_{L^1(K)}$), ens queda, per tot $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} &\mu(\{x \in K : |h(x)| > 2\delta\}) \leq \mu(\{x \in K : \mathcal{M}(g - f)(x) > \delta\}) + \mu(\{x \in K : |g(x) - f(x)| > \delta\}) \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{4\varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

I com que aquesta desigualtat és vàlida per tot ε positiu, ens queda que el conjunt $E_\delta = \{x \in K : |h(x)| > 2\delta\}$ és de mesura nul·la. Com que això val per tot δ positiu i $N \cap K$ és la unió dels conjunts E_δ, en particular una unió numerable si fem $\delta = 1/n$ per n enter positiu, $N \cap K$ també és de mesura nul·la, i com que K és un compacte qualsevol, $\mu(N) = 0$, com volíem demostrar. $\square$

Corol·lari 1.6.3. *Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, i x un punt de Lebesgue de f. Aleshores $|f(x)| \leq \mathcal{M}(f)(x)$.*

Demostració.

$$\lim_{r \to 0^+} \left| \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y) \mathrm{d}y - f(x) \right| \leq \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0.$$

Per tant el límit de la mitjana de f a $(x - r, x + r)$ és $f(x)$ als punts de Lebesgue, també és així amb $|f|$, i com que el suprem és més gran o igual que el límit, $\mathcal{M}(f)(x) \geq |f(x)|$. $\square$

1.7 La descomposició de Calderón-Zygmund a $\mathbb{R}$

Per tot k enter, definim $\mathcal{Q}_k$ la família d'intervals de la forma $[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k})$, amb $a \in \mathbb{Z}$.

Anomenem $\mathcal{Q}$ la família d'intervals diàdics a la unió de totes les $\mathcal{Q}_k$. Donats dos intervals diàdics, o son disjunts o un està contingut a l'altre, i cada interval diàdic de la família $\mathcal{Q}_k$ està contingut en un de les famílies $\mathcal{Q}_j$ amb $j < k$ i conté 2^{j-k} intervals de la família $\mathcal{Q}_j$ amb $j > k$.

Podem definir ara un operador maximal com l'anterior, però fent servir només aquests intervals per calcular les mitjanes:

Definició 1.7.1. Donada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, localment integrable definim

$$E_k(f)(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q(x),$$
$$M_d(f)(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |E_k(|f|)(x)|.$$

L'operador M_d s'anomena operador maximal diàdic i està directament relacionat amb $\mathcal{M}$ en el sentit que detallem a continuació.

Proposició 1.7.2. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$. Aleshores $M_d(f)(x) \leq 2\mathcal{M}(f)(x)$. A més a més, per tot x punt de Lebesgue de f, $|f(x)| \leq M_d(f)(x)$.*

Demostració. Si I_x és l'interval de longitud 2^k que conté x, $I_x = [a_x, b_x)$, i fem $r = \max(x - a_x, b_x - x)$, tindrem $r \leq 2^k$.

$$E_k(|f|)(x) = \frac{1}{2^k} \int_{I_x} |f(y)| \mathrm{d}y \leq 2 \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| \mathrm{d}y.$$

Agafant suprems als dos costats ens queda $M_d(f)(x) \leq 2\mathcal{M}(f)(x)$.

Ara, si x és un punt de Lebesgue de f, i I_n és la successió d'intervals diàdics de longitud 2^{-n} que contenen x,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2^n} \int_{I_n} f(y)\mathrm{d}y - f(x) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int_{I_n} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y \leq 2 \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0.$$

I aleshores $\lim_{n\to\infty} E_n(f)(x) = f(x)$, i, com que el suprem és més gran o igual que el límit, $M_d(f)(x) \geq |f(x)|$. □

Per qualsevol subconjunt Ω d'intervals de la família $\mathcal{Q}_k$,

$$\int_\Omega E_k(f)(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x.$$

Suposem ara que f és real i no negativa. Si ara considerem el conjunt $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : M_d(f)(x) > \alpha\}$ com abans, podem dividir-lo en intervals diàdics de la manera següent:

$$E_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R} : E_k(f)(x) > \alpha, \text{ però } E_j(f)(x) \leq \alpha \text{ per } j < k\} =: \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_{\alpha,k}.$$

Els $E_{\alpha,k}$ son disjunts, i cadascun és una unió d'intervals de $\mathcal{Q}_k$,

$$|E_\alpha| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |E_{k,\alpha}| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha} \int_{E_{\alpha,k}} E_k(f)(x)\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha} \int_{E_{\alpha,k}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int_{E_\alpha} f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\alpha}||f||_1.$$

Extrapolant aquest resultat de funcions positives a complexes, veiem que l'operador M_d és $(1,1)$-feble igual que $\mathcal{M}$.

En aquesta deducció, hem construit una partició de l'espai coneguda com a descomposició de Calderón-Zygmund, que detallem ara:

Teorema 1.7.3. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$, real i no negativa, $\alpha > 0$. Aleshores, existeix $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió d'intervals diàdics disjunts tal que, anomenant Ω a la seva unió,*

- $|\Omega| \leq \frac{1}{\alpha}||f||_1$.
- $f(x) \leq \alpha \quad \mu - g.a.\ x \notin \Omega$.
- $\alpha < \frac{1}{Q_n}\int_{Q_n} f(x)\mathrm{d}x \leq 2\alpha$.

Aleshores, podem escriure $f = g + b$, definint

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \notin \Omega, \\ \frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} f(x)\mathrm{d}x & si\ x \in Q_n. \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin \Omega, \\ f(x) - \frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} f(x)\mathrm{d}x & si\ x \in Q_n. \end{cases}$$

I com a conseqüència la mitjana de b és zero a cada interval Q_n de la descomposició.

Demostració. Definim els conjunts $E_{\alpha,k}$ igual que a la deducció anterior, i els agafem com a successió d'intervals diàdics. Aleshores $\Omega = E_\alpha$. El primer punt és el que hem vist anteriorment.

Si $x \notin \Omega$, $M_d(f)(x) \leq \alpha$, i per tant $f(x) \leq \alpha$ a tots els punts de Lebesgue del complementari de Ω.

Si $x \in Q_n$, tenim que $Q_n \in \mathcal{Q}_k$. Sigui Q'_n l'interval de $\mathcal{Q}_{k-1}$ on pertany x. Aleshores, la mitjana de f a Q'_n és menor o igual a α perquè si no Q'_n formaria part de la descomposició i no Q_n, i per tant la mitjana de f a Q_n és com a molt 2α perquè la mesura és la meitat. □

D'aquesta manera, podem descomposar una funció integrable f en una part g fitada i una part b que te suport de mesura finita i mitjana zero.

1.8 Sèries de Fourier

Les sèries de Fourier apareixen de manera natural quan intentem resoldre EDPs on apareix el Laplacià amb condicions de contorn periòdiques, exemples destacats en són l'equació de la calor i l'equació d'ones, ja que les exponencials $e^{\alpha t}$ són funcions pròpies d'aquest operador, i la periodicitat implica que α ha de ser imaginari.

Típicament si fem $\alpha = i\omega$, anomenarem freqüència a ω, i si imposem que una exponencial $e^{i\omega t}$ és L-periòdica, aleshores $L\omega = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. D'aquí obtenim les freqüències naturals o harmònics d'una longitud concreta:

$$\omega = \frac{2\pi m}{L}, \ m \in \mathbb{Z}.$$

En aquest treball hem triat fer $L = 1$. Una altra tria típica és $L = 2\pi$. En qualsevol cas, fent un canvi de variable lineal, $t' = at$, podem extrapolar fàcilment els resultats a sèries de Fourier amb una longitud L arbitrària.

Una vegada tenim definit aquest conjunt de funcions, és natural preguntar-se si es pot expressar una funció periódica com una combinació lineal d'aquestes, i sota quines condicions. En aquest sentit, definim, de moment en un sentit formal:

Definició 1.8.1. Donada $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, anomenem coeficients de Fourier complexos a $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

$$\hat{f}(m) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi imt}\mathrm{d}t,$$

i anomenem Sèrie de Fourier complexa a:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)e^{2\pi imt}.$$

Si f és integrable, aleshores $\hat{f}$ estarà ben definida. El problema invers, és a dir, sota quines condicions de $\hat{f}$ la suma convergeix a f i en quin sentit, és més complicat i serà un dels objectius del següent capítol.

L'estudi de les propietats i la convergència d'aquestes sèries i la seva relació amb la regularitat de la funció original són una part fonamental de l'anàlisi harmònica.

Proposició 1.8.2. *Propietats de la sèrie de Fourier:*
Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{Z}$, no negatiu. Anomenem $\mathcal{R}(f)(t) = f(-t)$ la reflexió senar de f, i recordem que $\overline{f}$ és la conjugació complexa de f. Aleshores,

- $\widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g}$.
- $\widehat{(\mathcal{R}(f))} = \mathcal{R}(\hat{f})$.
- $\hat{\overline{f}} = \overline{\mathcal{R}(\hat{f})}$.
- *Si f és derivable b vegades, i $f^{(b)} \in L^1(\mathbb{T})$, $\widehat{f^{(b)}}(m) = (2\pi im)^b\hat{f}(m)$.*
- $\widehat{(f * g)} = \hat{f}\hat{g}$.

Demostració. Les tres primeres son evidents a partir de la definició.

La condició de derivació la veiem integrant per parts b vegades.

$$\int_0^1 f^{(b)}(t)e^{-2\pi imt)}\mathrm{d}t = (-1)^b\int_0^1 f(t)(-2\pi im)^b e^{-2\pi imt}\mathrm{d}t = (2\pi im)^b\int_0^1 f(t)e^{-2\pi imt}\mathrm{d}t.$$

I l'última és una aplicació directa del teorema de Fubini.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f*g)(t)e^{-2\pi imt}\mathrm{d}t &= \int_0^1\int_0^1 f(s)e^{-2\pi ims}g(t-s)e^{-2\pi im(t-s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(s)e^{-2\pi ims}\int_0^1 g(t-s)e^{-2\pi im(t-s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \hat{f}(m)\hat{g}(m).\end{aligned}$$

$\square$

Definició 1.8.3. Anomenarem polinomi trigonomètric a qualsevol combinació lineal finita de funcions $e^{2\pi imt}, m \in \mathbb{Z}$.

Per estudiar la convergència d'aquesta sèrie, és natural definir les sumes parcials de la següent manera:

Proposició 1.8.4. *Sigui* $D_N(t) = \sum_{m=-N}^{N} e^{2\pi imt}$. *Aleshores,*

$$S_N(f) := \sum_{m=-N}^{N} \hat{f}(m)e^{2\pi imt} = (D_N * f)(t).$$

Aquestes s'anomenen sumes parcials de la Sèrie de Fourier de f. Una observació addicional és que podem sumar la sèrie geomètrica, i, observant que $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, tenim:

$$D_N(t) = \frac{e^{2\pi i(N+1)t} - e^{-2\pi iNt}}{e^{2\pi it} - 1} = \frac{e^{2\pi i(N+1/2)t} - e^{-2\pi i(N+1/2)t}}{e^{\pi it} - e^{-\pi it}} = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

Demostració. Simplement, observem que cada terme de la suma de l'esquerra és la convolució de l'exponencial complexa corresponent amb la funció f:

$$\hat{f}(m)e^{2\pi imt} = \int_0^1 f(s)e^{-2\pi ims}\mathrm{d}s\ e^{2\pi imt} = \int_0^1 f(s)e^{2\pi im(t-s)}\mathrm{d}s = (f * e^{2\pi im\cdot})(t).$$

□

Aquestes funcions D_N s'anomenen nuclis de Dirichlet, i no són una aproximació de la identitat. Això va motivar la definició de la mitjana de Cèsaro,

$$F_N(t) = \frac{(D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_N(t))}{N+1},$$

que podem comprovar que és igual al nucli de Féjer:

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{N+1}(e^{-2\pi iNt} + 2e^{-2\pi i(N-1)t} + \ldots + Ne^{-2\pi it} + (N+1) + Ne^{2\pi it} + \ldots + e^{2\pi iNt}) \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\sum_{m=-N}^{0} e^{2\pi imt}\right)\left(\sum_{m=0}^{N} e^{2\pi imt}\right) = \frac{1}{N+1}\frac{e^{2\pi it} - e^{-2\pi iNt}}{e^{2\pi it} - 1}\frac{e^{2\pi i(N+1)t} - 1}{e^{2\pi it} - 1} \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{e^{\pi i(N+1)t} - e^{-\pi i(N+1)t}}{e^{\pi it} - e^{-\pi it}}\right) = \frac{\sin^2((N+1)\pi t)}{(N+1)\sin^2(\pi t)}. \end{aligned}$$

A diferència del nucli de Dirichlet, el nucli de Féjer és positiu, i és una aproximació de la identitat, com veurem a continuació, i d'aquí es pot deduir la convergència a L^p de les mitjanes de Cèsaro.

Proposició 1.8.5. F_N *és una aproximació de la identitat.*

Demostració. Amb l'expressió en funció dels sinus, tenim que $F_N \geq 0$, i amb l'expressió com a suma d'exponencials, tenim que la mitjana de F_N és 1 directament. Aleshores,

- $||F_N||_1 = 1$, i per tant la norma a $L^1(\mathbb{T})$ està fitada.
- Per tot $\delta > 0$, és a dir, per complementaris d'entorns del 0,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{1-\delta} |F_N(t)|\mathrm{d}t = 0.$$

Això es pot comprovar substituint directament l'expressió en funció dels sinus, ja que per $t \in (\delta, 1-\delta)$:

$$\frac{\sin^2((N+1)\pi t)}{(N+1)\sin^2(\pi t)} \le \frac{1}{(N+1)(\sin^2(\pi\delta))} \to 0 \text{ quan } N \to \infty.$$

□

Corol·lari 1.8.6. *Per $1 \le p < \infty$, els polinomis trigonomètrics són densos a $L^p(\mathbb{T})$. A més a més, tota funció contínua de $\mathbb{T}$ és límit uniforme de polinomis trigonomètrics.*

Demostració. Simplement cal aplicar el teorema 1.3.8 a la successió $F_N * f$ i observar que aquesta convolució és un polinomi trigonomètric:

$$\begin{aligned} F_N * f &= \sum_{m=-N}^{N} \left(1 - \frac{|m|}{N+1}\right) \int_0^1 e^{2\pi i m(t-s)} f(s)\mathrm{d}s \\ &= \sum_{m=-N}^{N} \left(\left(1 - \frac{|m|}{N+1}\right) \int_0^1 e^{-2\pi i m s} f(s)\mathrm{d}s\right) e^{2\pi i m t}. \end{aligned}$$

□

Finalment, recordem dos resultats d'acotació de la norma de la sèrie de Fourier:

Proposició 1.8.7.

$$||\hat{f}||_{l^2} = ||f||_{L^2},$$
$$||\hat{f}||_{l^\infty} \le ||f||_{L^1}.$$

Demostració. El primer resultat és el teorema de Parseval, que no demostrarem.

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ |\hat{f}(m)| = \left|\int_0^1 f(t)e^{-2\pi i m t}\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |f(t)e^{-2\pi i m t}|\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = ||f||_1.$$

□

1.9 La classe de Schwartz

Definició 1.9.1. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$. Direm que f és de la classe de Schwartz, $f \in \mathcal{S}$, si per tot parell $a, b \in \mathbb{Z}$, no negatius, existeix una constant $C_{a,b}$ tal que

$$\sup |t^a f^{(b)}(t)| \le C_{a,b},$$

on $f^{(b)}$ representa la b-èsima derivada de la funció.

Aquestes funcions són una extensió natural de la classe $\mathcal{C}_0^\infty$, com es pot comprovar fàcilment, ja que totes les derivades d'una funció $\mathcal{C}^\infty$ son continues i fitades sobre compactes, i t^a també ho és.

L'interés d'aquesta classe és fer-la servir com a classe densa de L^p on poder definir operadors que després estendrem per continuïtat, i que podem definir una noció de convergència a $\mathcal{S}$ de forma natural.

Definició 1.9.2. Sigui $\{f_k\}$ una successió de funcions a $\mathcal{S}$. Direm que $f_k \to f$ a la topologia de $\mathcal{S}$ si per tots $a, b \in \mathbb{Z}$ no negatius,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^a (f_k - f)^{(b)}(t)| \to 0.$$

Proposició 1.9.3. *Sigui* $M_1(t) = Ae^{-\frac{1}{(t+1/2)^2}} e^{-\frac{1}{(t-1/2)^2}} \chi_{[-1/2,1/2]}$, *on* A *és una constant de normalització tal que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} M_1(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Aleshores, $M_\varepsilon(t) = M_1(t/\varepsilon)/\varepsilon$ *és una aproximació de la identitat quan* $\varepsilon \to 0$.

Demostració. En primer lloc, $M_\varepsilon(t) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} M_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} M_1(t')\mathrm{d}t' = 1.$$

Per complementaris d'entorns del 0, per tot $\varepsilon < 2\delta$, el suport de $M_\varepsilon(t)$ és $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, i tenim automàticament

$$\int_{|t|>\delta} M_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Per tant la integral convergeix a zero quan $\varepsilon \to 0$. □

Observem que M_ε és una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposició 1.9.4. *Per tot* $1 \leq p \leq \infty$, *a classe de Schwartz és densa a* L^p.

Demostració. Considerem una funció f a L^p, i ara considerem $f_\varepsilon = M_\varepsilon * (f\chi_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]})$. Aquesta funció és de suport compacte per construcció (contingut a l'interval $[-\varepsilon/2 - 1/\varepsilon, \varepsilon/2 + 1/\varepsilon]$). A més a més, com que $f \in L^p$, és localment integrable, i $f\chi_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]} \in L^1$.

Per ser convolució d'una funció de $\mathcal{C}_0^\infty$ i una integrable, $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$. Amb això tenim que $f_\varepsilon \in \mathcal{S}$.

$$||f - f_\varepsilon||_p \leq ||f - M_\varepsilon * f||_p + ||M_\varepsilon * f - f_\varepsilon||_p = ||f - M_\varepsilon * f||_p + ||M_\varepsilon * (f - f\chi_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]})||_p.$$

El primer terme convergeix a zero quan $\varepsilon \to 0$ perquè M_ε és una aproximació de la identitat. Pel que fa al segon,

$$||M_\varepsilon * (f - f\chi_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]})||_p \leq ||M_\varepsilon||_1 ||f - f\chi_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}||_p = ||f - f\chi_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}||_p.$$

I ara és clar que també convergeix a zero, com volíem veure. □

Finalment, recalquem que si $f(t)$ és de la classe de Schwartz, $t^a f^{(b)}(t)$ també ho és.

1.10 La transformada de Fourier

Si volem extrapolar els resultats de les sèries de Fourier a funcions no periòdiques, resulta natural eliminar la discretització de les freqüències, i canviar les sumes per integrals.

Definició 1.10.1. Sigui $f \in \mathcal{S}$. Anomenem transformada de Fourier a

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t.$$

La classe de Schwartz és natural per definir aquest operador, ja que així sempre estarà ben definit, i, a més a més, valdrà la fòrmula d'inversió sense haver d'imposar restriccions addicionals.

Lema 1.10.2. *Sigui $f(t) = e^{-\pi t^2}$, aleshores $\hat{f} = f$.*

Demostració. Evidentment, f pertany a la classe $\mathcal{S}$. En primer lloc, calculem la integral de f, fent un canvi de variable a coordenades polars:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2-\pi s^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty} re^{-\pi r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\cdot -\frac{e^{-\pi r^2}}{2\pi}\Bigg|_0^{\infty} = 1.$$

Per tant $\int f = 1$.

Definim ara $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+is)^2}\mathrm{d}t.$$

Aquesta funció és constant, i per tant $F(s) \equiv 1$. Per veure-ho calculem la derivada:

$$F'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i(t+is)e^{-\pi(t+is)^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\pi(t+is)^2}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\omega)^2}e^{-\pi\omega^2}\mathrm{d}t = e^{-\pi\omega^2}.$$

□

Teorema 1.10.3. *Sigui $f \in \mathcal{S}$. Aleshores, $\hat{f}$ està ben definida, $\hat{f} \in \mathcal{S}$, i*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Demostració. En primer lloc, $|\hat{f}(\omega)| \leq ||f||_1$, i com que $\mathcal{S} \subset L^1$, la integral convergeix absolutament. Ara, com que $f(t)e^{-2\pi i\omega t}$ és de classe $\mathcal{C}^\infty$ respecte les dues variables, és clar que $\hat{f}(\omega)$ és de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Com que per tot parell d'enters no negatius a, b, $t^a f^{(b)}$ és integrable i de classe $\mathcal{C}^\infty$, podem integrar per parts b vegades i commutar derivades i integrals, i obtenim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f^{(b)}(t)\right)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(b)}(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t = (2\pi i\omega)^b \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t = (2\pi i\omega)^b\hat{f}(\omega)\\
\omega^b\hat{f}^{(a)}(\omega) &= \omega^b\frac{\partial^a}{\partial\omega^a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t = \omega^b\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^a}{\partial\omega^a}f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t\\
&= \omega^b\int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi it)^a f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^b}(2\pi i\omega)^b\int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi it)^a f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{(2\pi)^b}\mathcal{F}\left([(-2\pi it)^a f(t)]^{(b)}\right)(\omega).
\end{aligned}$$

Amb això tenim que $|\omega^b\hat{f}^{(a)}(\omega)| \leq (2\pi)^{-b}||[(-2\pi it)^a f(t)]^{(b)}||_1$, que està fitat perquè $f \in \mathcal{S}$.

Un cop vist que $\hat{f} \in \mathcal{S}$, per veure la fórmula d'inversió, abans necessitem un resultat previ: per funcions f, g de la classe de Schwartz,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Aquest ve directament de substituir la definició i aplicar el teorema de Fubini a les integrals. Ara, si fem $g(\omega) = e^{2\pi i\omega t}e^{-\pi\varepsilon^2\omega^2}$, tenim

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega s}e^{2\pi i\omega t}e^{-\pi\varepsilon^2\omega^2}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi((\omega\varepsilon+i(s-t)/\varepsilon)^2}e^{-\pi((s-t)/\varepsilon)^2}\mathrm{d}\omega\\
&= e^{-\pi((s-t)/\varepsilon)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi((\omega\varepsilon+i(s-t)/\varepsilon)^2}\mathrm{d}\omega\\
&= e^{-\pi((s-t)/\varepsilon)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi((\omega'+i(s-t)/\varepsilon)^2}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\varepsilon} = e^{-\pi((s-t)/\varepsilon)^2}\frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Substituint-ho al resultat preliminar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{1}{\varepsilon}e^{-\pi((s-t)/\varepsilon)^2}\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}e^{-\pi\varepsilon^2\omega^2}\mathrm{d}\omega.$$

L'integral de l'esquerra és la convolució de f amb la funció $e^{-\pi(t/\varepsilon)^2}/\varepsilon$, que és una aproximació de la identitat quan $\varepsilon \to 0^+$. Per tant, convergeix uniformement sobre compactes a $f(t)$.

L'integral de la dreta, pel teorema de la convergència dominada, convergeix a l'integral del límit puntual. Finalment tenim

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

□

Proposició 1.10.4. *Propietats de la transformada de Fourier:*
Siguin $f, g \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{Z}$, no negatiu. Anomenem $\mathcal{R}(f)(t) = f(-t)$ la reflexió senar de f, i recordem que $\overline{f}$ és la conjugació complexa de f. Aleshores,

- $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g}$.
- $\mathcal{F}(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(\hat{f})$.

- $\mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{R}(\hat{f})}$.
- $\mathcal{F}(f^{(b)}) = (2\pi i\omega)^b \hat{f}$.
- $\hat{f}^{(b)} = \mathcal{F}((-2\pi it)^b f)$.
- $\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{R}(\hat{f})$.
- $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.

Demostració. Les tres primeres son directes a partir de la definició. Les propietats sobre les derivades es dedueixen integrant per parts, i les hem obtingut a la prova del teorema.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-2\pi i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s) e^{-2\pi i\omega t} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i\omega s} g(t-s) e^{-2\pi i\omega (t-s)} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i\omega s} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s) e^{-2\pi i\omega (t-s)} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i\omega s} \hat{g}(\omega) \mathrm{d}s = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).
\end{aligned}
$$

□

Igual que hem fet al cas discret, és natural definir les sumes parcials de la següent manera:

Proposició 1.10.5. *Sigui $D_R(t) = \int_{-R}^{R} e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}\omega$. Aleshores, per $f \in \mathcal{S}$,*

$$S_R(f) := \int_{-R}^{R} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega t} = (D_R * f)(t).$$

Aquestes s'anomenen sumes parcials de la Sèrie de Fourier de f. Una observació addicional és que podem calcular la integral:

$$D_R(t) = \left.\frac{e^{2\pi i\omega t}}{2\pi it}\right|_{-R}^{R} = \frac{e^{2\pi iRt} - e^{-2\pi iRt}}{2\pi it} = \frac{\sin(2\pi Rt)}{\pi t}.$$

Demostració. Simplement, observem que cada terme de la suma de l'esquerra és la convolució de l'exponencial complexa corresponent amb la funció f:

$$\hat{f}(m) e^{2\pi imt} = \int_0^1 f(s) e^{-2\pi ims}\mathrm{d}s\ e^{2\pi imt} = \int_0^1 f(s) e^{2\pi im(t-s)}\mathrm{d}s = (f * e^{2\pi im\cdot})(t).$$

□

Aquestes funcions D_R s'anomenen nuclis de Dirichlet, i no són una aproximació de la identitat.

Finalment, enunciem dos resultats d'acotació de la norma de la transformada de Fourier:

Proposició 1.10.6. *Sigui $f \in \mathcal{S}$. Aleshores,*

$$||\hat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2},$$

$$||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}.$$

Demostració. Si fem $g = \overline{\hat{h}}$, amb $h \in \mathcal{S}$, aleshores aplicant les propietats anteriors tenim $\hat{g} = \overline{h}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{h(t)}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{h}(t)}\mathrm{d}t.$$

Aquesta igualtat s'anomena de Plancherel.
Si fem ara $h = f$, ens queda $||f||_2^2 = ||\hat{f}||_2^2$.

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ |\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-2\pi i\omega t}|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t = ||f||_1.$$

□

Aquests resultats ens permeten estendre la transformada de Fourier per continuïtat a un operador definit a $L^1 + L^2$, mantenint les propietats que hem vist abans sempre que les expressions estiguin ben definides.

1.10.1 Distribucions temperades i les seves transformades de Fourier

Definició 1.10.7. Anomenem $\mathcal{S}'$ al dual topològic de $\mathcal{S}$, és a dir, el conjunt d'aplicacions lineals continues de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{C}$, amb la topologia induida per

$$\psi_n \to \psi \text{ a } \mathcal{S}' \text{ si per tota } f \in \mathcal{S},\ \psi_n(f) \to \psi(f).$$

Aquestes funcionals s'anomenen distribucions temperades, i podem definir la transformada de Fourier d'una distribució en aquest sentit, aprofitant la relació que hem vist abans per als productes escalars:

Definició 1.10.8. Sigui $\psi \in \mathcal{S}'$. Aleshores, definim $\hat{\psi}$ com la distribució tal que, per tota $f \in \mathcal{S}$,

$$\hat{\psi}(f) = \psi(\hat{f}).$$

Podem definir també la convolució amb una distribució temperada, si recordem que T_s és l'operador de translació de manera que $T_s f(t) = f(t - s)$,

Definició 1.10.9. Sigui $\psi \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$. Anomenem convolució

$$\psi * f(t) = \psi(T_t(f)).$$

Un cas especial de distribucions temperades son les que admeten una representació en forma integral, és a dir, existeix $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

En aquest cas, la convolució es pot escriure $\psi * f = g * f$.

Finalment, observem que $\mathcal{S}'$ és una classe més gran que el dual de qualsevol L^p, perquè $\mathcal{S} \subsetneq L^p(\mathbb{R})$ per qualsevol $1 \leq p \leq \infty$, i per tant un subconjunt de $\mathcal{S}'$ i dels operadors convolució amb una distribució pertanyen, respectivament, de fet, al dual de L^p i al conjunt d'operadors lineals fitats de L^p.

1.11 Funcions holomorfes i harmòniques

Comencem recordant les definicions, i establint una relació fonamental entre les funcions holomorfes i les funcions harmòniques de dues variables reals:

1.11.1 Funcions holomorfes

Definició 1.11.1. Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de manera que la seva derivada estigui ben definida a z.

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Aleshores diem que f és holomorfa a z.

L'estudi d'aquestes funcions porta a resultats molt restrictius sobre la seva naturalesa, en particular, aquí recordarem quatre propietats fonamentals que no demostrarem.

Proposició 1.11.2 (Equacions de Cauchy-Riemann)**.** *Sigui $f : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorfa, amb un obert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Escrivim $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, identificant $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$. Aleshores, u i v satisfan:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

D'altra banda, si una funció $f \equiv u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ és de classe $\mathcal{C}^1$ com a funció de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ i satisfà aquestes dues equacions, aleshores és holomorfa.

Proposició 1.11.3 (Analiticitat)**.** *Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa a $z_0 \in \mathbb{C}$. Aleshores, és infinites vegades derivable a z_0 i existeix $r > 0$ tal que, $\forall z : |z - z_0| < r$,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

La sèrie convergeix de uniformement sobre compactes.

Proposició 1.11.4 (Propietat de la mitjana)**.** *Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa a un disc de radi $R > 0$ al voltant de $z_0 \in \mathbb{C}$. Aleshores, per tot $r \in (0, R)$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \mathrm{d}t.$$

Proposició 1.11.5 (Principi dels zeros aïllats)**.** *Sigui $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, no idènticament nul·la, amb $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ obert. Sigui Z el conjunt de punts z de Ω on $f(z) = 0$. Aleshores Z no té cap punt d'acumulació.*

1.11.2 Funcions harmòniques a $\mathbb{R}^2$

Definició 1.11.6. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que satisfà l'equació de Laplace,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Aleshores diem que f és harmònica.

Es pot veure que la condició de $\mathcal{C}^2$ no cal i és conseqüència de ser solució de l'equació, però ens interessarà establir-la des del principi per comoditat.

Proposició 1.11.7. *Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa, $f = u + iv$ la descomposició en part real i imaginària. Aleshores, u, v són harmòniques.*

Demostració. Fent servir les equacions de Cauchy-Riemann i el Teorema de Schwartz (perquè $u \in \mathcal{C}^\infty$),

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Anàlogament, $\Delta v = 0$. □

En aquest cas, u i v s'anomenen conjugades harmòniques. De la mateixa manera que les parts real i imaginària d'una funció holomorfa són funcions harmòniques, vistes com a funcions de $\mathbb{R}^2$, ens podem preguntar en quins casos una funció harmònica sempre és la part real d'una funció holomorfa.

Definició 1.11.8. Sigui $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció harmònica, Ω obert. S'anomena conjugada harmònica v a la funció tal que (u, v) és solució de les equacions de Cauchy-Riemann.

Proposició 1.11.9. *Sigui $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció harmònica, amb Ω obert i simplement connex. Aleshores existeix una conjugada harmònica v i és única llevat d'una constant additiva.*

Demostració.

$$f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Aquesta funció és de classe $\mathcal{C}^1$ per construcció. A més a més, anomenant $f = R + iI$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial I}{\partial y},$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial I}{\partial x}.$$

Per tant, f és holomorfa i té una primitiva única, g llevat de constant, a Ω. Queda veure que la part real de g és u, i aleshores fent v igual a la seva part imaginària, tindrem la conjugada harmònica.

Separem la part real i imaginària, $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Fixem un punt z_0 a Ω i imposem $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$.

$$g' = f \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + i\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

D'aquí tenim que $u = \tilde{u}$, i $\tilde{v}$ és la seva conjugada harmònica, llevat d'una constant additiva. □

Com que les funcions harmòniques es poden identificar (en entorns simplement connexos, i per tant, també localment) amb la part real o imaginària de funcions holomorfes, podem translladar les propietats anteriors, i tindrem que si una funció és harmònica, serà analítica, i tindrà la propietat de la mitjana.

A més a més, com que la composició de funcions holomorfes és holomorfa, la composició de funcions harmòniques amb holomorfes (vistes com a funcions de $\mathbb{R}^2$) també serà harmònica.

Recordem ara dues propietats fonamentals de les funcions harmòniques.

Proposició 1.11.10 (Principi del màxim)**.** *Sigui* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* Ω *obert i connex. Aleshores,* u *no te cap mínim ni màxim local estricte a* Ω*.*

La prova es basa en la propietat de la mitjana. Si hi ha un extrem estricte, el valor de la funció no pot ser la mitjana dels valors que pren al voltant del punt.

Proposició 1.11.11 (Unicitat de la solució)**.** *Siguin* $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* Ω *obert i connex. Si el conjunt* $I = \{p \in \Omega : u(p) = v(p)\}$ *te un punt d'acumulació, aleshores* $u \equiv v$ *a tot* Ω*.*

Demostració. Considerem $u - v = \Re h$, amb h holomorfa, perquè $u - v$ és harmònica. Aleshores podem aplicar el principi dels zeros aïllats i tenim que $h \equiv 0$. $\square$

Capítol 2

La funció conjugada

2.1 Introducció

L'objectiu d'aquest capítol és veure l'equivalència de les diferents definicions de funció conjugada per funcions periòdiques, i enumerar algunes de les seves propietats i la seva relació amb la convergència en norma de les sèries de Fourier.

Definició 2.1.1. Donat $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ un polinomi trigonomètric, considerem la seva sèrie de Fourier complexa, i definim la seva funció conjugada $\tilde{f}$ com:

$$\tilde{f}(t) = -i \sum_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \hat{f}(m) e^{2\pi imt}.$$

A més a més, definim les projeccions de Riesz com:

$$P_+(f)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{f}(m) e^{2\pi imt},$$

$$P_-(f)(t) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \hat{f}(m) e^{2\pi imt}.$$

Aquestes tres expressions s'han d'entendre de moment en un sentit formal, i després veurem quan corresponen a funcions a L^p.

Com que un producte terme a terme de sèries de Fourier correspon a la sèrie de Fourier d'una convolució, podem sumar les sèries per separat, i arribem a una convolució amb un nucli que no és integrable. Li donarem sentit a aquesta expressió a la secció 2.5.

$$\tilde{f} = \cot(\pi \cdot) * f.$$

A partir d'aquesta definició, podem escriure tant f com $\tilde{f}$ a partir de les projeccions de Riesz, i, similarment, podem recuperar aquestes projeccions a partir d'aquestes dues:

$$\begin{gathered} f = P_+(f) + P_-(f) + \hat{f}(0),\ \tilde{f} = i(P_-(f) - P_+(f)), \\ P_+(f) = \frac{f - \hat{f}(0) + i\tilde{f}}{2},\ P_-(f) = \frac{f - \hat{f}(0) - i\tilde{f}}{2}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

De moment podem definir la conjugació per als polinomis trigonomètrics, que són una classe densa a $L^p(\mathbb{T})$, i després quan tinguem algun resultat d'acotació podrem redefinir-la com l'única extensió continua sobre tot l'espai $L^p(\mathbb{T})$.

Definició 2.1.2. Sigui P un polinomi trigonomètric, aleshores definim $\mathfrak{H}(P) = \tilde{P}$.

Proposició 2.1.3. *Propietats de la funció conjugada:*

- $\mathfrak{H}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathfrak{H}(f) + \beta\mathfrak{H}(g)$.
- $\mathfrak{H}^2 = -Id$, $\mathfrak{H}^4 = Id$, *de forma que tenim una inversa explícita* $\mathfrak{H}^{-1} = -\mathfrak{H}$.
- $||\mathfrak{H}f||_2^2 = ||f||_2^2 - |\hat{f}(0)|^2$.
- *Si* f, g *són reals,* $\int f \cdot \mathfrak{H}g = -\int \mathfrak{H}f \cdot g$, *és a dir,* $\mathfrak{H}$ *és un operador antisimètric.*

Demostració. Les dues primeres son evidents a partir de la definició.

$$||\mathfrak{H}f||_2^2 = ||\widehat{\mathfrak{H}f}||_2^2 = ||-i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{f}(m)||_{l^2}^2 = ||\hat{f}(m)||_{l^2}^2 - |\hat{f}(0)|^2 = ||f||_2^2 - |\hat{f}(0)|^2.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathfrak{H}g(t)\mathrm{d}t &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)\widehat{\mathfrak{H}g}(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)\overline{-i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{g}(m)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)} = \int_0^1 -\mathfrak{H}f(t)g(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

2.2 Acotació en norma de la funció conjugada

Teorema 2.2.1. *Sigui* $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$. *Aleshores,* $\mathfrak{H}(f) = \tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ *està ben definida i existeix* $A_p > 0$ *tal que*

$$||\tilde{f}||_p \leq A_p||f||_p.$$

Demostració. Sigui P un polinomi trigonomètric. Suposem sense pèrdua de generalitat que P pren valors reals, i $\hat{P}(0) = 0$. Com que P pren valors reals, $\hat{P}(-m) = \overline{\hat{P}(m)}$, i per tant

$$\tilde{P}(t) = -i\sum_{m>0}\hat{P}(m)e^{2\pi imt} + i\sum_{m>0}\overline{\hat{P}(m)}e^{-2\pi imt} = 2\Re\left(-i\sum_{m>0}\hat{P}(m)e^{2\pi imt}\right).$$

Això vol dir que $\tilde{P}$ també pren valors reals. D'altra banda, podem expressar $P + i\tilde{P}$ com un polinomi en $e^{2\pi it}$, per tant, per tot $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\int_0^1 (P(t) + i\tilde{P}(t))^{2k}\mathrm{d}t = 0.$$

Expandint i agafant la part real, tenint en compte que $P(t)$ és real,

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{2k}{2m}\int_0^1 P(t)^{2m}\tilde{P}(t)^{2k-2m}\mathrm{d}t = 0$$

$$||\tilde{P}||_{2k}^{2k} \leq \sum_{m=1}^{k}\binom{2k}{2m}\int_0^1 P(t)^{2m}\tilde{P}(t)^{2k-2m}\mathrm{d}t \leq \sum_{m=1}^{k}\binom{2k}{2m}||P||_{2k}^{2k-2m}||\tilde{P}||_{2k}^{2m}.$$

L'última desigualtat és la desigualtat de Hölder aplicada amb exponents $2k/(2k-2m)$ i $2k/2m$. Si dividim tot per $||P||_{2k}^{2k}$ i anomenem $R = ||\tilde{P}||_{2k}/||P||_{2k}$, ens queda

$$R^{2k} \leq \sum_{m=1}^{k}\binom{2k}{2m}R^{2k-2m}.$$

I a partir d'aquí és clar que si R és no negatiu, està fitat per una constant C_{2k}. Ara, fent servir la linealitat dels operadors i la desigualtat triangular, aquesta desigualtat és vàlida per un polinomi trigonomètric general amb una altra constant.

Ara, com que els polinomis trigonomètrics son densos a L^p, hi ha una extensió continua de l'operador que conserva la mateixa desigualtat, i com que calcular coeficients de la sèrie de Fourier és una operació continua a L^p, la representació d'aquesta extensió en sèrie de Fourier serà la mateixa que hem donat al principi del capítol.

Amb això, hem vist el resultat per $p = 2k$, amb k enter positiu. Pel Teorema 1.4.2, també tenim el resultat per tot $2 \leq p < \infty$, i ara farem servir que com que la conjugació és un operador antisimètric, el seu operador adjunt és ell mateix canviat de signe, i per tant si $1 < p < 2$, la mateixa acotació que tenim per $p' > 2$ ens val per p:

$$||\tilde{f}||_p = \sup_{||g||_{p'}=1}\left|\int \tilde{f}\cdot g\right| = \sup_{||g||_{p'}=1}\left|-\int f\cdot\tilde{g}\right| \leq ||f||_p||\tilde{g}||_{p'} \leq ||f||_p A_{p'}.$$

□

2.3 Convergència de les sumes parcials de la sèrie de Fourier

La qüestió que ens ocupa és, donada $f \in L^p(\mathbb{T})$, les sumes parcials de la seva sèrie de Fourier convergeixen a f en el sentit de la norma de L^p? És a dir, sota quines condicions

$$||S_N(f) - f||_p \to 0.$$

Teorema 2.3.1. *Sigui $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$. Aleshores la sèrie de Fourier convergeix en norma p, és a dir, $||S_N(f) - f||_p \to 0$ quan $N \to \infty$.*

Per demostrar aquest resultat farem servir que la convergència de la sèrie de Fourier està íntimament relacionada amb la convergència de la sèrie que defineix la funció conjugada, i que la conjugació és un operador fitat de L^p a L^p, amb $p > 1$. Abans, però, veurem per què a L^∞ i L^1 no passa.

Exemple 2.3.2. L'extensió 1-periòdica de $f(t) = \lfloor 2t \rfloor$ definida a $[0, 1)$ pertany clarament a $L^\infty(\mathbb{T})$ i te una discontinuitat de salt d'amplada 1. D'altra banda, les sumes parcials de la Sèrie de Fourier són totes continues. Per tant no podem tenir convergència en norma L^∞.

Per demostrar el resultat a L^1, farem servir el Teorema de Banach-Steinhaus [1], que recordem ara:

Teorema 2.3.3. *Siguin E, F espais de Banach, $T_i : E \to F, i \in I$ una família d'operadors tal que, $\forall x \in E$, $\sup_{i\in I} ||T_i(x)||_F < \infty$. Aleshores,*

$$\sup ||T_i|| < \infty.$$

És a dir, que si una família d'operadors és fitada puntualment, és fitada uniformement.

Proposició 2.3.4. *Existeix una funció $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que la seva sèrie de Fourier no convergeix a $L^1(\mathbb{T})$.*

Demostració. Demostrarem aquest resultat per contradicció. Suposem que per tota funció f de L^1, les sumes parcials convergeixen. Aquest espai de funcions és un espai de Banach, que podem anomenar E, i tenim

$$\forall f \in E,\ ||S_N(f) - f||_1 \to 0,$$
$$\forall f \in E,\ \sup_{N\in\mathbb{Z}^+} ||S_N(f)||_1 < \infty.$$

On podem aplicar el teorema de Banach-Steinhaus aplicat a l'operador $(D_N *)$ per obtenir

$$\sup_{N\in\mathbb{Z}^+} ||S_N||_{L^1\to L^1} < \infty.$$

Però, per altra banda, $||S_N||_{L^1\to L^1} = ||D_N||_1$ (proposició 1.3.11), que ara veurem que no està fitada, perquè creix com el logaritme de N.

$$||D_N||_1 = \int_0^1 |D_N| > \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\frac{m}{2N+1}}^{\frac{m+1}{2N+1}} |D_N| = \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\frac{m}{2N+1}}^{\frac{m+1}{2N+1}} \frac{|\sin((2N+1)\pi t)|}{|\sin \pi t|} dt.$$

Ara, observant que a totes les integrals de la suma $t \leq N/(2N+1) < 1/2$, $|\sin \pi t| > |2t|$, i podem canviar el denominador pel seu valor màxim perquè tot és positiu:

$$||D_N||_1 > \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\frac{m}{2N+1}}^{\frac{m+1}{2N+1}} \frac{|\sin((2N+1)\pi t)|}{2(m+1)/(2N+1)} dt \geq \sum_{m=0}^{N-1} \frac{2N+1}{2(m+1)} \left| \int_{\frac{m}{2N+1}}^{\frac{m+1}{2N+1}} \sin((2N+1)\pi t) dt \right|$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{2N+1}{2(m+1)} \left| \frac{-\cos((m+1)\pi) + \cos(m\pi)}{(2N+1)\pi} \right| = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\pi(m+1)} = \frac{1}{\pi} H_N.$$

On $H_N = 1 + 1/2 + \ldots + 1/N \to \infty$, i per tant $||D_N||_1$ no està fitat, amb el que tenim una contradicció. □

Podem destacar que quan $p = 2$, el problema es redueix a aplicar la identitat de Parseval, i tenim

$$||f||_2^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m)|^2 < \infty,$$
$$||S_N(f) - f||_2^2 = \sum_{m=-\infty}^{-(N+1)} |\hat{f}(m)|^2 + \sum_{m=N+1}^{\infty} |\hat{f}(m)|^2. \to 0$$

En general, tret dels casos $p = 1, \infty$ la resposta és afirmativa i passa per la funció conjugada.

Lema 2.3.5. *Sigui* $1 < p < \infty$, $\{a_m\} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. *Per cada* $R \geq 0$, *sigui* $\{a_m(R)\}$ *de suport finit, de manera que* $\lim a_m(R) = a_m$ *per tot* m. *Definim:*

$$S_R(f)(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(R)\hat{f}(m)e^{2\pi imt}, \ f \in L^p(\mathbb{T}),$$
$$A(h)(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\hat{h}(m)e^{2\pi imt}, \ h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}).$$

Aleshores, $S_R(f)$ *convergeix per tota funció* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *si i només si*

$$\sup ||S_R||_{L^p \to L^p} = K < \infty.$$

A més a més, si passa això,

$$\sup_{h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}),\ ||h||_p = 1} ||A(h)||_p \leq K,$$

i aleshores A *s'estén per continuitat a un operador fitat de* $L^p(\mathbb{T})$ *a ell mateix.*

Demostració. Si $S_R(f)$ convergeix, $||S_R(f)||$ està fitat per una constant que depén de f. Aplicant el teorema de Banach-Steinhaus, $\sup ||S_R||_{L^p \to L^p} = K < \infty$.

Suposem ara $\sup ||S_R||_{L^p \to L^p} = K < \infty$. Aleshores,

$$||A(h)||_p = || \lim S_R(h)||_p \leq \liminf ||S_R(h)||_p \leq K||h||_p.$$

Per tant tenim la segona desigualtat, i A s'estén de forma natural com a operador fitat a tot $L^p(\mathbb{T})$. Demostrarem que $S_R(f) \to A(f)$ en norma. Per tot $\varepsilon > 0, f \in L^p(\mathbb{T})$, existeix un polinomi trigonomètric P de grau d tal que $||f - P||_p < \varepsilon$.

$$||S_R(P) - A(P)||_p \leq ||S_R(P) - A(P)||_\infty \leq \sum_{m=-d}^{d} |a_m(R) - a_m||\hat{P}(m)| < \varepsilon,$$

per tot $R \geq R_0$, ja que $\lim a_m(R) = a_m$. Finalment,

$$||S_R(f) - A(f)||_p \leq ||S_R(f) - S_R(P)||_p + ||S_R(P) - A(P)||_p + ||A(P) - A(f)||_p \leq K\varepsilon + \varepsilon + K\varepsilon.$$

□

Lema 2.3.6. *Sigui* $1 \leq p < \infty$. *Aleshores* $S_N f$ *convergeix a* f *en norma* p, *si i només si existeix* $C_p > 0$ *tal que per tot* N,

$$||S_N f||_p \leq C_p||f||_p.$$

Demostració. Si $S_N f$ convergeix, aleshores, per cada f, $||S_N f||_p$ està fitat, i aplicant el teorema de Banach-Steinhaus, tenim una fita uniforme, independent de f, de manera que $||S_N f||_p \leq C_p||f||_p$.

Per veure l'altra implicació, fem servir la densitat dels polinomis trigonomètrics a $L^p(\mathbb{T})$. Per tot $\varepsilon > 0$, existeix un polinomi trigonomètric P tal que $||f - P||_p < \varepsilon$. Aleshores,

$$\lim_{N\to\infty} ||S_N f - f||_p \leq \lim_{N\to\infty} (||S_N P - P|| + ||S_N f - S_N P|| + ||P - f||) \leq 0 + C_p\varepsilon + \varepsilon.$$

Com que això val per tot $\varepsilon > 0$, $\lim ||S_N f - f||_p = 0$. □

Abans hem vist, però, que no tenim convergència per $p = 1$. En el cas $p > 1$ la resposta serà afirmativa.

Teorema 2.3.7. *Sigui* $1 < p < \infty$. *Aleshores,*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}), ||S_N(f) - f||_p \to 0 \Leftrightarrow ||\mathfrak{H}||_{L^p \to L^p} < \infty.$$

Demostració. Recordant (2.1), $\mathfrak{H}$ fitat és equivalent a P_+ fitada.

D'altra banda,

$$S'_N(g) := \sum_{m=0}^{2N} \hat{g}(m) e^{2\pi imt} = e^{2\pi iNt} S_N(e^{-2\pi iNt} g),\ ||S'_N|| = ||S_N||.$$

Com a conseqüència, $\sup ||S_N|| < \infty \Leftrightarrow \sup ||S'_N|| < \infty$, i estem en condicions d'aplicar el lema anterior.

Si $||S_N(f) - f|| \to 0$ per tota funció, aleshores $\sup ||S_N|| < \infty$. Per tant $\sup ||S'_N|| < \infty$ i aplicant i fent servir la notació del lema 2.3.5, $A(f) = P_+(f) + \hat{f}(0)$ és fitat, i per tant també P_+.

D'altra banda, si P_+ és fitada,

$$\begin{aligned} S'_N(g) &= \sum_{m=0}^{2N} \hat{g}(m) e^{2\pi imt} = \hat{g}(0) + P_+(g) - \sum_{m=2N+1}^{\infty} \hat{g}(m) e^{2\pi imt} \\ &= \hat{g}(0) + P_+(g) - e^{4\pi iNt} P_+(e^{-4\pi iNt} g). \end{aligned}$$

I per tant $||S'_N|| \leq 2||P_+|| + 1$, i $\sup ||S'_N|| < \infty$, $\sup ||S_N|| < \infty$ i aleshores $S_N(f) \to f$ a L^p. □

Ara aplicant aquest lema i fent servir que la conjugació és un operador fitat, acabem la demostració que les sèries de Fourier de les funcions de L^p convergeixen a la funció original per $1 < p < \infty$.

2.4 La funció conjugada harmònica i el nucli de Poisson

2.4.1 Funcions harmòniques al disc i nucli de Poisson

Definició 2.4.1. Anomenarem disc unitari, o simplement disc, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Definició 2.4.2. Anomenem nucli de Poisson a la funció del disc $\mathbb{D}$, que per conveniència tractem en coordenades polars, $z = re^{it}$

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}.$$

L'origen d'aquesta expressió ve de considerar una funció harmònica al disc com la part real d'una funció holomorfa i passar per una representació com a sèrie de Fourier. En primera instància, fem un esbós de la deducció sense entrar en formalismes ni en la convergència de sumes i integrals.

$$u(z) = \Re f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (c_k z^k + \overline{c_k z}^k).$$

Els c_k són els coeficients en sèrie de potències de f. Passant a coordenades polars, $z = re^{it}$, i podem recalcular fàcilment els a_k.

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(r^k(c_k e^{kit} + \overline{c_k}e^{-kit})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|}e^{kit}.$$

Si ara fem $r = 1$, tenim una sèrie de Fourier i podem calcular els coeficients.

$$\begin{aligned}
u(e^{it}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{kit} \Rightarrow a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{is})e^{-iks}\mathrm{d}s \\
u(re^{it}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{is})e^{-iks}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{is})\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(t-s)}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{is})P_r(t-s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Examinem amb una mica més de detall l'última igualtat. Per $|r| < 1$ tenim convergència uniforme de la sèrie pel criteri de l'arrel i el criteri d'acotació uniforme de Weierstrass, i, per calcular la suma, observem que la podem expressar com dues sèries geomètriques:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(t-s)} &= \sum_{k=0}^{\infty}(re^{i(t-s)})^k + \sum_{k=0}^{\infty}(re^{i(s-t)})^k - 1 = \frac{1}{1-re^{i(t-s)}} + \frac{1}{1-re^{i(s-t)}} - 1 \\
&= \frac{(1-re^{i(t-s)}) + (1-re^{i(s-t)}) - (1-re^{i(t-s)})(1-re^{i(s-t)})}{(1-re^{i(t-s)})(1-re^{i(s-t)})} \\
&= \frac{2-re^{i(t-s)}-re^{i(s-t)}-1-r^2+re^{i(t-s)}+re^{i(s-t)}}{1+r^2-re^{i(t-s)}-re^{i(s-t)}} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-s)}.
\end{aligned}$$

Podem representar aleshores les funcions harmòniques del disc com

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{s}{2\pi}\right)P_r(t-s)\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s)P_r(t-2\pi s)\mathrm{d}s,\ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}.$$

En aquest cas direm que u és la integral de Poisson de f, i és natural preguntar-se per quines funcions f estarà ben definida i en quin sentit hi ha convergència de $u(re^{it}) \to v(t)$ quan fem $r \to 1^-$.

Proposició 2.4.3. *Sigui* $r \in [0, 1)$, *aleshores*

$$P_r(2\pi\cdot) : \mathbb{T} \to \mathbb{R},\ P_r(2\pi t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi t)}.$$

és una aproximació positiva de la identitat quan $r \to 1^-$.

Demostració. En primer lloc, $P_r(t) \geq 0$ perquè és un quocient de dos termes positius. Com que $r < 1$, l'expressió en sèrie infinita del nucli és uniformement convergent, i podem fer commutar la suma i la integral:

$$\int_0^1 P_r(2\pi t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\int_0^1 e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t = 1.$$

Finalment, veiem que la integral sobre complementaris d'entorns del 0 tendeix a zero:

$$\int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi t)}\mathrm{d}t \leq \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1-r^2}{(1-r)^2\cos(2\pi\delta)+(1+r^2)(1-\cos(2\pi\delta))}$$
$$\leq \frac{(1-2\delta)(1-r^2)}{(1+r^2)(1-\cos(2\pi\delta))} \to 0 \text{ quan } r \to 1^-.$$

□

Proposició 2.4.4. *Sigui $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$, i u la seva integral de Poisson. Considerem $r < 1$ fix, $g(t) = u(re^{2\pi it})$. Aleshores u és harmònica a $\mathbb{D}$ i $g \in L^p(\mathbb{T})$ i $||g||_p \leq ||f||_p$.*

Demostració.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{s}{2\pi}\right) P_r(2\pi t - s)\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s')P_r(2\pi(t-s'))\mathrm{d}s',$$
$$||g||_p = ||f * P_r(2\pi\cdot)||_p \leq ||f||_p||P_r(2\pi\cdot)||_1 = ||f||_p.$$

Es tracta d'aplicar directament que el nucli de Poisson és una aproximació de la identitat positiva.

A més a més, si considerem la sèrie de Fourier de f,

$$u(re^{2\pi it}) = \int_0^1 f(s)P_r(2\pi(t-s))\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s)\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi ik(t-s)}\mathrm{d}s$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi ikt}\int_0^1 f(s)e^{-2\pi iks}\mathrm{d}s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)r^{|k|}e^{2\pi ikt},$$

on hem pogut commutar la sèrie i la integral perquè $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$, $L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$ per ser un espai de mesura finita, $r < 1$ i pel criteri M de Weierstrass la convergència és uniforme. Com que cadascun dels termes de la suma és una funció harmònica, u també ho és. □

Lema 2.4.5. *Sigui $f \in L^p(\mathbb{T})$, amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores, per tot $r < 1$,*

$$|f * P_r(2\pi\cdot)| \leq \mathcal{M}(f)(t).$$

Demostració. Com que el nucli de Poisson és una funció de $L^1(\mathbb{T})$, parella, positiva i decreixent, es tracta d'aplicar la proposició 1.5.4. □

2.4.2 El teorema de Fatou al disc

En primer lloc, veiem que la representació com a integral de Poisson serveix, de fet, per totes les funcions harmòniques del disc que satisfan una condició raonable d'acotació.

Lema 2.4.6. *Sigui $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ una successió de funcions uniformement fitada a $L^p(\mathbb{T})$, és a dir, existeix $C > 0$ tal que per tot $n \in \mathbb{N}$,*

$$||f_n||_p \leq C.$$

Aleshores, existeix una subsuccessió $\{f_{n_k}\}$ tal que, per tota $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

per alguna funció $f \in L^p(\mathbb{T})$. En aquest cas, f es diu el límit feble de la successió.

Demostració. Farem tota la prova per funcions amb imatge real. És trivial passar a complexos per linealitat i fent servir la desigualtat triangular.

Siguin $\{g_n\}$ els polinomis trigonomètrics reals (definits com la part real dels polinomis trigonomètrics) amb coeficients racionals. Com que els polinomis trigonomètrics son densos a $L^{p'}$, aquests també ho son.

Definim ara la primera successió d'índexs $n_{0,k} = k$, i definim inductivament a partir d'aquesta les successions d'índexs $\{n_{m,k}\}$ com una subsuccessió de $\{n_{m-1,k}\}$ de la següent manera:

Per tot $1 \leq i \leq m$, sigui

$$[a_i, b_i] = \left[\inf_k \int_0^1 f_{n_{m-1,k}}(t)g_i(t)\mathrm{d}t,\ \sup_k \int_0^1 f_{n_{m-1,k}}(t)g_i(t)\mathrm{d}t\right].$$

Aleshores, hi ha infinits termes de $\{f_{m-1,k}\}$ tal que aquesta integral és menor que $(a_i+b_i)/2$, o n'hi ha infinits tal que és major o igual. Ens quedem amb la subsuccessió formada per aquests infinits termes i repetim el procediment per cada $1 \leq i \leq m$.

Triar aquesta subsuccessió d'aquesta manera ens garanteix la següent condició: per tot $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}&\sup_k \int_0^1 f_{n_{m,k}}(t)g_i(t)\mathrm{d}t - \inf_k \int_0^1 f_{n_{m,k}}(t)g_i(t)\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sup_k \int_0^1 f_{n_{m-1,k}}(t)g_i(t)\mathrm{d}t - \inf_k \int_0^1 f_{n_{m-1,k}}(t)g_i(t)\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Finalment, fem $n_k = n_{k,k}$. Comprovem que per qualsevol funció $g \in L^{p'}$ el límit existeix. En primer lloc, per tot $\varepsilon > 0$, existeix un polinomi trigonomètric com abans tal que $||g - g_n||_{p'} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\mathrm{d}t - \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\mathrm{d}t \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sup_k \int_0^1 f_{n_{m,k}}(t)g(t)\mathrm{d}t - \lim_{m\to\infty} \inf_k \int_0^1 f_{n_{m,k}}(t)g(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

si ara $m \geq n$, i tenint en compte que $||f_n||_p \leq C$ en qualsevol cas, podem separar $g = g_n + (g - g_n)$ i aplicant $n - m$ vegades la condició que hem vist abans,

$$\begin{aligned}&< \lim_{m\to\infty}\left(\sup_k \int_0^1 f_{n_{m,k}}(t)g_n(t)\mathrm{d}t - \inf_k \int_0^1 f_{n_{m,k}}(t)g_n(t)\mathrm{d}t\right) + 2C\varepsilon \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{m-n}}\left(\sup_k \int_0^1 f_{n_{n,k}}(t)g_n(t)\mathrm{d}t - \inf_k \int_0^1 f_{n_{n,k}}(t)g_n(t)\mathrm{d}t\right) + 2C\varepsilon = 2C\varepsilon.\end{aligned}$$

Com que el raonament val per qualsevol $\varepsilon > 0$, el límit existeix per tota $g \in L^{p'}$. Ara, si definim $T : L^{p'} \to \mathbb{R}$,

$$Tg = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Tenim que Tg està ben definit, és lineal i $|Tg| \leq C||g||_{p'}$, per tant T és un element del dual de $L^{p'}$, que identifiquem amb $f \in L^p(\mathbb{T})$ d'aquesta manera:

$$Tg = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

□

Teorema 2.4.7. *Sigui* $1 < p < \infty$, $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *harmònica tal que*

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t < \infty.$$

Aleshores, existeix $f \in L^p(\mathbb{T})$ *tal que* u *és la seva integral de Poisson.*

Demostració. Sigui $\{r_n\}$ una successió creixent de nombres positius tal que $\lim r_n = 1$. Tenim que $\{u(r_n e^{2\pi it})\}$ és una successió fitada a L^p. Sigui f el límit feble de la successió tal com l'hem definit al lema anterior. Per tot n, $u(r_n z)$ és una funció harmònica a un disc de radi $1/r_n > 1$, per tant és harmònica al disc tancat de radi 1 i es pot escriure com a integral de Poisson:

$$u(r_n re^{2\pi it}) = \int_0^1 u(r_n e^{2\pi is}) P_r(2\pi(t-s))\mathrm{d}s.$$

Ara, fent $n \to \infty$, la part de l'esquerra te com a límit $u(re^{2\pi it})$, i la integral de la dreta, fent servir el lema anterior, convergeix a

$$\int_0^1 f(s) P_r(2\pi(t-s))\mathrm{d}s.$$

□

En aquest treball, enunciem i demostrem una versió restringida d'aquest resultat clàssic, que val també per $p = 1$.

Teorema 2.4.8 (Teorema de Fatou per $1 < p < \infty$)**.** *Sigui* $1 < p < \infty$, $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *harmònica,* $u_r : \mathbb{T} \to \mathbb{R},\ 0 < r < 1$ *definida com a* $u_r(t) = u(re^{2\pi it})$, *i tal que*

$$\sup_{0 \le r < 1} ||u_r||_p < \infty.$$

Aleshores, existeix $u_1 \in L^p(\mathbb{T})$ *tal que*

$$\lim_{r \to 1^-} ||u_r(t) - u_1(t)||_p = 0,$$

$$\lim_{r \to 1^-} |u_r(t) - u_1(t)| = 0 \quad \mu - \text{g.a.}t \in \mathbb{T}.$$

Demostració. Sota aquestes condicions, u admet una representació com la integral de Poisson d'una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$:

$$u(re^{2\pi it}) = \int_0^1 f(s) P_r(2\pi(t-s))\mathrm{d}s.$$

La primera afirmació és immediata a partir del fet que P_r és una aproximació de la identitat quan $r \to 1^-$. Per veure la segona, definim l'operador maximal radial $u^*(t) = \sup_{0 \le r < 1} |u(re^{2\pi it})|$, $u^*(t) \le \mathcal{M}f(t)$, i per tant $u^* \in L^p(\mathbb{T})$, i està fitat en funció de u, i com a conseqüència del Teorema 1.2.14 el límit radial de u existeix gairebé arreu i coincideix amb f.

□

Aquest teorema també s'aplica a funcions holomorfes perquè tant la part real com imaginària d'una funció holomorfa son harmòniques i les desigualtats s'estenen trivialment.

2.4.3 La funció conjugada harmònica al disc i el nucli conjugat de Poisson

Considerem u una funció harmònica del disc, com la part real d'una funció holomorfa f. Podem triar f tal que els coeficients del seu desenvolupament en sèrie de potències són tots reals, i adaptar el raonament al cas general després perquè els càlculs són els mateixos. Si fem $v = \Im f$, v serà la conjugada harmònica de u tal que $v(0) = 0$.

Ara fent el mateix desenvolupament que per obtenir el nucli de Poisson arribem a que si u és la integral de Poisson d'una funció u_1 que té $\{a_k\}$ com a sèrie de Fourier, v és la integral de Poisson d'una funció v_1 que te $\{b_k\}$ com a coeficients de Fourier, i tindrem que $-iv_1 = \mathfrak{H}(u_1)$, en un sentit formal.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

$$u(re^{it}) = \Re f(re^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ikt}, \; v(re^{it}) = \Im f(re^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k r^{|k|} e^{ikt},$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{c_k}{2} & \text{si } k > 0, \\ c_0 & \text{si } k = 0, \\ \frac{\overline{c_k}}{2} & \text{si } k < 0. \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} \frac{c_k}{2} & \text{si } k > 0, \\ 0 & \text{si } k = 0, \\ -\frac{\overline{c_k}}{2} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Ara fem el mateix que a la secció 2.4.1, fent $b_k = \operatorname{sgn}(k) a_k$:

$$\begin{aligned} v(re^{it}) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) r^{|k|} e^{ikt} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{is}) e^{-iks} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{is}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) r^{|k|} e^{ik(t-s)} \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{is}) i Q_r(t-s) \mathrm{d}s. \\ iQ_r(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} = \frac{re^{it}}{1-re^{it}} - \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} \\ &= \frac{re^{it}(1-re^{-it}) - re^{-it}(1-re^{it})}{(1-re^{it})(1-re^{-it})} = \frac{re^{it} - r^2 - re^{-it} + r^2}{1 + r^2 - r(e^{it} + e^{-it})} = \frac{2ri\sin(t)}{1 + r^2 - 2r\cos(t)}. \end{aligned}$$

La funció Q_r s'anomena nucli de Poisson conjugat, i no és positiva ni és una aproximació de la identitat com P_r. Podem remarcar que $f(re^{it}) = P_r(t) + iQ_r(t)$ és una funció holomorfa, i efectivament Q_r és la conjugada harmònica de P_r:

$$f(re^{it}) = P_r(t) + iQ_r(t) = \frac{1 + 2ri\sin(t) - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t)} = \frac{1 + re^{it} - re^{-it} - r^2}{1 - re^{it} - re^{-it} + r^2} = \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}.$$

Proposició 2.4.9. *Sigui* $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$v(re^{2\pi it}) = \int_0^1 f(s) Q_r(2\pi(t-s)) \mathrm{d}s.$$

Considerem $r < 1$ fix, $g(t) = v(re^{2\pi it})$. Aleshores v és la conjugada harmònica de u tal que $v(0) = 0$ i $g \in L^p(\mathbb{T})$.

Demostració.

$$g(t) = \int_0^1 f(s)Q_r(2\pi(t-s))\mathrm{d}s,$$
$$||g||_p = ||f * Q_r(2\pi\cdot)||_p \le ||f||_p||Q_r(2\pi\cdot)||_1.$$

A més a més, si considerem la sèrie de Fourier de f,

$$\begin{aligned} v(re^{2\pi it}) &= \int_0^1 f(s)Q_r(2\pi(t-s))\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sgn}(k)r^{|k|}e^{2\pi ik(t-s)}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sgn}(k)r^{|k|}e^{2\pi ikt}\int_0^1 f(s)e^{-2\pi iks}\mathrm{d}s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sgn}(k)\hat{f}(k)r^{|k|}e^{2\pi ikt}, \end{aligned}$$

on hem pogut commutar la sèrie i la integral per un raonament anàleg al que fem al 2.4.4.

Per veure que v és la conjugada de u, només cal veure que $u + iv$ és una funció holomorfa, cosa que queda clara en el desenvolupament en sèrie de potències. □

Definició 2.4.10. Sigui $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ una funció integrable, $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ la seva integral de Poisson, i v la conjugada harmònica de u tal que $v(0) = 0$. Aleshores, definim:

$$\tilde{f} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, \ \tilde{f}(t) = \lim_{r\to 1^-} v(re^{2\pi it}).$$

Per linealitat la conjugació també queda definida per funcions amb imatge complexa.

Proposició 2.4.11. *$\tilde{f}$ està ben definida.*

Demostració. Suposem que f és real. Podem escriure $f = f^+ - f^-, f^+, f^- \ge 0$, i que u^+, u^- siguen les respectives integrals de Poisson i v^+, v^- les conjugades harmòniques. Farem el raonament per f^+. En primera instància, $u^+ \ge 0$ perquè el nucli de Poisson és positiu (v^+ no és necessàriament positiva).

Sigui $g = u^+ + iv^+$. És una funció holomorfa a $\mathbb{D}$ amb part real positiva. Sigui $h = 1/(1+g)$.

$$|h(z)| = \frac{1}{|1+g(z)|} \le \frac{1}{|\Re(1+g(z))|} \le 1.$$

Per tant podem aplicar el Teorema 2.4.8 amb qualsevol p, ja que $L^\infty(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$, i per tant h te límits radials gairebé arreu cap a la vora del disc. A més a més, com que h és holomorfa el conjunt de zeros no te punts d'acumulació i aleshores $h \neq 0$ $\mu -$ g.a. a la vora del disc.

Finalment, $g = 1/h - 1$ està ben definida gairebé arreu a la vora del disc.

Anàlogament, $u^- + iv^-$ està ben definida (gairebé arreu) a la vora del disc, i per tant $\tilde{f}$ està ben definida. □

2.4.4 Acotació de la conjugada harmònica

Lema 2.4.12. *Sigui $1 < p \le 2$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, holomorfa, $f = u + iv$ les parts real i imaginària, $u \ge 0$, $v(0) = 0$. Aleshores, existeix C_p tal que per tot $0 < r < 1$,*

$$\int_0^1 |v(re^{2\pi it})|^p\mathrm{d}t \le C_p \int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p\mathrm{d}t.$$

Demostració. Fem $f(z) = |f(z)|e^{i\psi(z)}$, de manera que $|\psi(z)| < \pi/2$. Primer veurem que existeixen C_p, D_p tals que per tot $|\alpha| \leq \pi/2$,

$$|\sin(\alpha)|^p \leq 1 \leq C_p|\cos(\alpha)|^p - D_p\cos(p\alpha).$$

Fixem $\alpha_0 > \pi/(2p)$. Aleshores, per tot $\alpha : |\alpha| \geq \alpha_0$, $\cos(p\alpha) < \cos(p\alpha_0) < 0$.

Fent $D_p = -1/\cos(p\alpha_0)$, ens assegurem $-D_p\cos(p\alpha) \geq 1$ per $|\alpha| \geq \alpha_0$.

Ara, si $|\alpha| < \alpha_0$, $\cos(\alpha) > \cos(\alpha_0)$. Fent $C_p = (1 + D_p)/\cos(\alpha_0)^p$, ens assegurem que $C_p|\cos(\alpha)|^p > 1 + D_p$ i hem acabat.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |v(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t &= \int_0^1 |f(re^{2\pi it})|^p|\sin(\psi(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 |f(re^{2\pi it})|^p(C_p|\cos(\psi(re^{2\pi it}))|^p - D_p\cos(p\psi(re^{2\pi it})))\mathrm{d}t \\
&= C_p\int_0^1 |f(re^{2\pi it})|^p|\cos(\psi(re^{2\pi it}))|^p \mathrm{d}t - D_p\int_0^1 \Re(f(re^{2\pi it})^p)\mathrm{d}t \\
&\leq C_p\int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

A l'última desigualtat hem fet servir la propietat de la mitjana de les funcions holomorfes, i que la part real de $f(0)^p$ és positiva. □

Teorema 2.4.13. *Sigui* $1 < p < \infty$. *Aleshores, existeix una constant* A_p *tal que*

$$\int_0^1 |\tilde{f}|^p \leq A_p\int_0^1 |f|^p.$$

Demostració. Primer fem $1 < p \leq 2$. Per linealitat, podem suposar que f és real i positiva. Sigui u la integral de Poisson de f, $u \geq 0$, i v la conjugada harmònica determinada per $v(0) = 0$. Estem en condicions d'aplicar el lema anterior i el lema de Fatou, i tenim que per tot $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\tilde{f}(t)|^p \mathrm{d}t &= \int_0^1 |\lim_{r\to 1^-} v(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t \leq \liminf_{r\to 1^-}\int_0^1 |v(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t \\
&\leq \liminf_{r\to 1^-} C_p\int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t \leq C_p\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Per demostrar-ho per $p > 2$ farem servir la dualitat de L^p i $L^{p'}$. Recordem que $p' = p/(p-1)$. Igual que abans, definim u i v com la integral de Poisson i la conjugada harmònica tal que $v(0) = 0$. Per tot $r < 1$,

Definint μ com la integral de Poisson de g i ν la seva conjugada harmònica amb $\nu(0) = 0$, tenim que $(u(rz)+iv(rz))(\mu(z)+i\nu(z))$ és una funció holomorfa, i per tant $u(rz)\nu(z)+v(rz)\mu(z)$, la part imaginària, és harmònica i nul·la al zero. De moment fixem $0 < r < 1$.

Per una part, per la propietat de la mitjana, per tot $0 < s < 1$,

$$\int_0^1 u(rse^{2\pi it})\nu(se^{2\pi it}) + v(rse^{2\pi it})\mu(se^{2\pi it})\mathrm{d}t = 0.$$

Necessitem veure que la integral es conserva quan fem $s \to 1$.

μ és la integral de Poisson de g, per tant, podem aplicar el lema anterior, i tindrem una acotació sobre la norma a $L^{p'}$ de $\nu(re^{2\pi it})$ en funció de la de $\mu(re^{2\pi it})$, per tot $0 < r < 1$. Amb això i el Teorema 2.4.8, tenim que els límits de $||\mu(re^{2\pi it}) - g(t)||_{p'}$ i $||\nu(re^{2\pi it}) - \tilde{g}(t)||_{p'}$ són zero quan $r \to 1^-$.

Com que u, v son funcions continues i per tant fitades, això implica que l'integrand convergeix en la norma de $L^{p'}$, i per tant també en la norma de L^1, a

$$\int_0^1 u(re^{2\pi it}\tilde{g}(t) + v(re^{2\pi it})g(t)\mathrm{d}t = 0.$$

I ara podem aplicar la dualitat.

$$\left(\int_0^1 |v(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{||g||_{p'}=1} \int_0^1 v(re^{2\pi it})g(t)\mathrm{d}t = \sup_{||g||_{p'}=1} -\int_0^1 u(re^{2\pi it})\tilde{g}(t)\mathrm{d}t,$$

$$\left|\int_0^1 u(re^{2\pi it})\tilde{g}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} ||\tilde{g}||_{p'} \leq C_{p'}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalment, fent servir el lema de Fatou igual que abans,

$$\int_0^1 |\tilde{f}|^p \leq \liminf_{r\to 1^-} C_{p'}^{\frac{p}{p'}} \int_0^1 |u(re^{2\pi it})|^p \mathrm{d}t \leq B_p \int_0^1 |f|^p.$$

□

En el cas de $p = 1$, no obstant, no tenim aquesta acotació forta (de L^1 a L^1). Això és equivalent, en última instància, a que les sumes parcials de la sèrie de Fourier d'una funció de $L^1(\mathbb{T})$ no sempre convergeixen a la funció original.

Exemple 2.4.14. Sigui $f(t) = P_r(2\pi t)$ amb $r < 1$. Aleshores $\tilde{f}(t) = Q_r(2\pi t)$, i es té $||P_r||_1 = 1$, però $||Q_r||_1 \to \infty$.

Demostració.

$$h(se^{2\pi it}) = P_{rs}(2\pi t) + iQ_{rs}(2\pi t) = \frac{1 + rse^{2\pi it}}{1 - rse^{2\pi it}}.$$

Aquesta funció és holmorfa al disc obert de radi $1/r > 1$, $h(0) = 1$, i si fem $s = 1$, $\Re h(e^{2\pi it}) = P_r(2\pi t)$. Per la unicitat de les funcions harmòniques amb condicions de vora fixes, $\Re h$ és la integral de Poisson de P_r, i $\Im h$ és conjugada harmònica de $\Re h$ com sempre.

$$\tilde{f}(t) = \lim_{s\to 1^-} \Im h(se^{2\pi t}) = Q_r(2\pi t),$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |Q_r(2\pi t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 \left|\frac{2r\sin(2\pi t)}{1 + r^2 - 2r\cos(2\pi t)}\right| \mathrm{d}t &= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \frac{r\sin(t)\mathrm{d}t}{1 + r^2 - 2r\cos(t)} \\
&> \frac{8}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{rt\mathrm{d}t}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos(t))} > \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{2rt\mathrm{d}t}{(1-r)^2 + rt^2} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{(1-r)^2 + r\pi^2}{(1-r)^2}\right),
\end{aligned}$$

i aquesta última divergeix, per tant $||Q_r||_1 \to \infty$. □

Teorema 2.4.15. *La conjugació és* $(1,1)$*-feble, és a dir, donada* $f \in L^1(\mathbb{T})$*,* $\tilde{f} \in L^{1,\infty}(\mathbb{T})$*, i existeix una constant* C *tal que, si* $E_\lambda = \{x \in \mathbb{T} : |\tilde{f}(x) > \lambda\}$*,*

$$|E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda}||f||_1.$$

Demostració. Per linealitat, podem assumir f real i positiva, $||f||_1 = 1$, i la mitjana de f també és 1.

Fixem $\lambda > 0$. La funció $z \to \frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}$ envia nombres amb part real positiva a nombres amb part imaginària negativa, cosa que podem comprovar sabent que l'argument principal del denominador és major que el del numerador i la diferència d'arguments és menor que π en valor absolut.

Per tant, triant l'argument tal que $-\pi < \arg z < 0$ quan $\Im z < 0$, definim, per z tal que $\Re z > 0$:

$$h_\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}.$$

Pel raonament anterior, $0 < h_\lambda(z) < 1$. A més a més h_λ és harmònica (l'argument és harmònic i tota la resta són funcions holomorfes).

En primer lloc, cal observar que si $|z| > \lambda$, aleshores $h_\lambda(z) > 1/2$:

$$\Re\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda} = 1 - \Re\frac{2i\lambda}{z+i\lambda} \geq 1 - \left|\frac{2i\lambda}{z+i\lambda}\right| > 0 \Rightarrow \arg\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda} > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow h_\lambda(z) > \frac{1}{2},$$

i que ara estimem $h_\lambda(1)$:

$$h_\lambda(1) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi}(\arg(1-i\lambda) - \arg(1+i\lambda)) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(\lambda),$$

i per valors de α entre 0 i $\pi/2$, tenim

$$\tan(\pi/2 - \alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \arctan(\frac{1}{\alpha}) > \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Si $\alpha \geq \pi/2$ és clar que també se satisfà la segona desigualtat, i substituint-ho,

$$h_\lambda(1) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(\lambda) < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

Fem u la integral de Poisson de f, v la seva conjugada harmònica tal que $v(0) = 0$, aleshores $h_\lambda(u + iv)$ és harmònica, per $r < 1$, per la propietat de la mitjana,

$$\int_0^1 h_\lambda(u(re^{2\pi it}) + iv(re^{2\pi it}))\mathrm{d}t = h_\lambda(u(0)) = h_\lambda\left(\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s\right) = h_\lambda(1) < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

D'altra banda, si $|v(re^{2\pi it})| > \lambda$, $|(u + iv)(re^{2\pi it})| > \lambda$ i $h_\lambda(u(re^{2\pi it}) + iv(re^{2\pi it})) > 1/2$.

Per tant, per la desigualtat de Txebixev, per cada $0 < r < 1$, el conjunt $A_r = \{t \in \mathbb{T} : |v(re^{2\pi it})| > \lambda\}$ te mesura $|A_r| < 4/(\pi\lambda)$.

Com que $\tilde{f}$ és el límit radial de v quan $r \to 1^-$, $E_\lambda \subset \liminf_{r\to 1^-} A_r$, i per tant $|E_\lambda| \leq 4/(\pi\lambda)$, i finalment si agafem f qualsevol, descomposant en la part positiva i negativa fem el mateix raonament per cada una i sumem, i reajustant la constant obtenim la desigualtat buscada. □

Proposició 2.4.16. *Sigui* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *un polinomi trigonomètric. Aleshores,* $\tilde{f}$ *coincideix amb la definició anterior.*

Demostració. Per linealitat, podem demostrar-ho per monomis de la forma $f(t) = e^{2\pi ikt}$.

Amb la definició via conjugada harmònica, fem $f(t) = \cos(2\pi kt) + i\sin(2\pi kt)$. Aleshores, calculem la conjugada de la part real i imaginària per separat:

$$u_1(re^{2\pi it}) = r^{|k|}\cos(2\pi kt) = r^{|k|}\cos(2\pi|k|t),\ u_2(re^{2\pi it}) = r^{|k|}\sin(2\pi kt) = \operatorname{sgn}(k)r^{|k|}\sin(2\pi|k|t),$$

que per ser funcions harmòniques a tot el pla i coincidir amb f a la vora del disc, són iguals a la seva integral de Poisson. Podem aleshores calcular les seves conjugades harmòniques i reconstruir la funció conjugada fent $r \to 1^-$, $z = re^{2\pi it}$.

$$u_1(z) = \Re(z^{|k|}),\ u_2(z) = \Re(-i\operatorname{sgn}(k)z^{|k|}) \Rightarrow v_1 = r^{|k|}\sin(2\pi|k|t),\ v_2 = -\operatorname{sgn}(k)r^{|k|}\cos(2\pi|k|t).$$

I per continuitat $\tilde{f}(t) = v_1(e^{2\pi it}) + iv_2(e^{2\pi it}) = \sin(2\pi|k|t) - i\operatorname{sgn}(k)\cos(2\pi|k|t) = -i\operatorname{sgn}(k)e^{2\pi ikt}$. □

Corol·lari 2.4.17. *Sigui $f \in L^p(\mathbb{T})$, amb $p \geq 1$. Aleshores, $\mathfrak{H}(f)$ està ben definida i $\tilde{f}$ coincideix amb la definició anterior.*

Demostració. Escriurem la prova per al cas $p > 1$. En el cas $p = 1$ és el mateix argument però per l'espai d'arribada $L^{1,\infty}$.

Considerem una successió $\{P_n\}$ de polinomis trigonomètrics que aproxima f en la norma de L^p. Sense pèrdua de generalitat, $||f - P_n||_p < 2^{-n}||f||_p$. Fem ara $Q_n = P_{n+1} - P_n$. Clarament tenim $||Q_n||_p < 2^{1-n}||f||_p$, i $f = \sum Q_n$, amb convergència en norma.

Com que els Q_n són polinomis trigonomètrics, $\tilde{Q_n} = \mathfrak{H}(Q_n)$, i fent servir la linealitat de $\mathfrak{H}$,

$$||\mathfrak{H}(f)||_p \leq \sum ||\mathfrak{H}(Q_n)||_p < C\sum ||Q_n||_p < 4C||f||_p.$$

Per tant, la sèrie que, en un principi només estava definida en sentit formal, té sentit com a funció de L^p, i a més a més, l'acotació de l'operador de conjugació ens val. □

2.5 La conjugació com a operador integral singular

Definició 2.5.1. Donada $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, definim la seva funció conjugada $\tilde{f}$ com:

$$\tilde{f}(t) = (f * \cot(\pi\cdot)) = \text{v.p.} \int_0^1 \cot(\pi s)f(t-s)\mathrm{d}s.$$

On podem remarcar que $\cot(\pi t) = \frac{\sin(2\pi t)}{1-\cos(2\pi t)}$ és una funció amb una singularitat a $t = 0$, i que la integral serà considerada com a valor principal de Cauchy, és a dir,

$$\tilde{f}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s)f(t-s)\mathrm{d}s.$$

Preliminarment, observem que el nucli de convolució que estem fent servir és el límit puntual del nucli conjugat de Poisson quan fem $r \to 1^-$.

El primer que hem de fer amb aquesta definició és veure on és vàlida i després relacionar-la amb la definició anterior:

Proposició 2.5.2. *Sigui $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ un polinomi trigonomètric. Aleshores, $\tilde{f}$ està ben definida i coincideix amb les altres definicions.*

Demostració. Per linealitat, podem demostrar-ho per monomis de la forma $f(t) = e^{2\pi ikt}$.

$$\tilde{f}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) e^{2\pi ik(t-s)} \mathrm{d}s = e^{2\pi ikt} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) e^{-2\pi iks} \mathrm{d}s.$$

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\sin(2\pi s)}{1-\cos(2\pi s)} e^{-2\pi iks} \mathrm{d}s = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\sin(2\pi s)}{1-\cos(2\pi s)} \cos(2\pi ks)\mathrm{d}s - i \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\sin(2\pi s)}{1-\cos(2\pi s)} \sin(2\pi ks)\mathrm{d}s.$$

La primera integral val zero perquè és el producte d'una funció parella respecte $s = 1/2$ i una altra senar. L'únic que falta veure és que

$$\int_0^1 \frac{\sin(2\pi s)}{1-\cos(2\pi s)} \sin(2\pi ks)\mathrm{d}s = \operatorname{sgn}(k).$$

No cal escriure el límit perquè l'integrand ja no te cap singularitat, com comprovarem a continuació quan calcularem aquesta integral amb la fòrmula dels residus. Sigui $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h(z) = \frac{2 + z + 1/z}{z - 1/z}(z^k - 1/z^k)\frac{1}{z}.$$

Quan $z = e^{it}$, $h(z) = (2 + 2\cos(t))/(2i\sin(t)) \cdot 2i\sin(kt)/z$, i aplicant la fòrmula dels residus:

$$\begin{aligned} Res(h;0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{2+2\cos(t)}{2i\sin(t)} 2i\sin(kt)\frac{ie^{it}\mathrm{d}t}{e^{it}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(t)}{\sin(t)}\sin(kt)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \frac{1+\cos(2\pi s)}{\sin(2\pi s)}\sin(2\pi ks)\mathrm{d}s = 2\int_0^1 \frac{\sin(2\pi s)}{1-\cos(2\pi s)}\sin(2\pi ks)\mathrm{d}s. \\ h(z) &= \frac{(1+z)^2(z^{2k}-1)}{(z+1)(z-1)z^k} = \frac{(1+z)(1+z+\ldots+z^{2k-1})}{z^k} \\ &= z^{k-1} + 2z^{k-2} + \ldots + 2z^{-k+1} + z^{-k}. \end{aligned}$$

Amb això veiem que h és holomorfa fora del 0, i que el residu és 2. Per acabar la prova, observem que si $k = 0$ la integral que volíem evaluar és evidentment nul·la i que si $k < 0$, com que el sinus és senar, podem canviar k per $-k$ i canviar de signe el resultat. Substituint el càlcul de la integral, si $f(t) = e^{2\pi ikt}$,

$$\tilde{f}(t) = e^{2\pi ikt} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) e^{-2\pi iks}\mathrm{d}s = -i\operatorname{sgn}(k)e^{2\pi ikt}.$$

□

Teorema 2.5.3. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$, real, i u la seva integral de Poisson. Sigui v la conjugada harmònica tal que $v(0) = 0$. Aleshores, el límit*

$$\tilde{f}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) f(t-s)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

existeix gairebé arreu, i, si $r = 1 - 2\pi\varepsilon$,

$$\left| v(re^{2\pi it}) - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) f(t-s)\mathrm{d}s \right| \leq C\mathcal{M}(f)(t). \tag{2.3}$$

Demostració. Primer veiem que per $t \neq 0$, el límit

$$\lim_{r \to 1^-} Q_r(2\pi t) = \frac{\sin(2\pi t)}{1 - \cos(2\pi t)} = \cot(\pi t).$$

Per $\varepsilon < t < 1/2$,

$$\begin{aligned} Q_1(2\pi t) - Q_r(2\pi t) &= \frac{(1-r)^2 \sin(2\pi t)}{(1 - \cos(2\pi t))(1 - 2r\cos(2\pi t) + r^2)} = \frac{1-r}{1+r} Q_1(2\pi t) P_r(2\pi t) \\ &\leq \frac{1-r}{1+r} Q_1(2\pi\varepsilon) P_r(2\pi t). \end{aligned}$$

Com que $(1-r)Q_1(2\pi\varepsilon) \leq 2$, ens queda que finalment, per $t \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$,

$$|Q_1(2\pi t) - Q_r(2\pi t)| \leq \frac{2P_r(2\pi t)}{1+r} \leq 2P_r(2\pi t). \tag{2.4}$$

Per altra banda, per $|t| < \varepsilon$,

$$|Q_r(2\pi t)| = \left| \frac{2r\sin(2\pi t)}{1 - 2r\cos(2\pi t) + r^2} \right| \leq \frac{2r(1-r)}{(1-r)^2} < \frac{2}{1-r}.$$

$$\left| v(re^{2\pi i t}) - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) f(t-s) \mathrm{d}s \right|$$

$$\leq \int_{|s| \leq \varepsilon} |Q_r(2\pi s) f(t-s)| \mathrm{d}s + \int_{|s| > \varepsilon} |(Q_r(2\pi s) - Q_1(2\pi s)) f(t-s)| \mathrm{d}s. \tag{2.5}$$

La primera integral està fitada per l'operador maximal de forma directa:

$$\int_{|s| \leq \varepsilon} |Q_r(2\pi s) f(t-s)| \mathrm{d}s < \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{|s| \leq \varepsilon} |f(t-s)| \mathrm{d}s \leq \frac{2}{\pi} \mathcal{M}(f)(t). \tag{2.6}$$

Per estimar l'altra integral, fem servir (2.4):

$$\int_{|s| > \varepsilon} |(Q_r(2\pi s) - Q_1(2\pi s)) f(t-s)| \mathrm{d}s \leq \int_0^1 2P_r(2\pi s) |f(t-s)| \mathrm{d}s \leq 2\mathcal{M}(f)(t). \tag{2.7}$$

Per veure el resultat sobre convergència puntual, veurem que l'expressió (2.5) tendeix a zero gairebé arreu. En primer lloc observem que tant Q_1 com Q_r són senars, i per tant tenen integral nul·la sobre intervals simètrics respecte el zero.

$$\begin{aligned} v(re^{2\pi i t}) - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) f(t-s) \mathrm{d}s &= \int_{|s| \leq \varepsilon} Q_r(2\pi s)(f(t-s) - f(t)) \mathrm{d}s \\ &+ \int_{|s| > \varepsilon} (Q_r(2\pi s) - Q_1(2\pi s))(f(t-s) - f(t)) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Fent servir (2.6) i (2.7),

$$\left| v(re^{2\pi i t}) - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \cot(\pi s) f(t-s) \mathrm{d}s \right|$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{|s|\leq\varepsilon}|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s+\int_0^1 2P_r(2\pi s)|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s.$$

Sigui t un punt de Lebesgue de f. La primera integral tendeix a zero quan $r\to 1^-$ com a conseqüència directa del Teorema 1.6.2.

Veurem que l'última integral també convergeix a zero quan fem $r\to 1^-$. Sigui $\varepsilon>0$, aleshores, existeix $\delta_0>0$ tal que per tot $0<\delta<\delta_0$,

$$\frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta}|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s<\varepsilon.$$

Per altra part, per tot $\delta_0\leq s\leq 1-\delta_0$, $P_r(2\pi s)\leq P_r(2\pi\delta_0)\to 0$ quan $r\to 1^-$. Triem r prou gran perquè $P_r(2\pi\delta_0)<\varepsilon/||f||_1$.

$$\int_0^1 2P_r(2\pi s)|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s=\int_{|s|\geq\delta_0}2P_r(2\pi s)|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s+\int_{|s|<\delta_0}2P_r(2\pi s)|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s.$$

$$\int_{|s|\geq\delta_0}2P_r(2\pi s)|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s\leq\frac{2\varepsilon}{||f||_1}\int_{|s|>\delta_0}|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s\leq 4\varepsilon.$$

Ara aprofitem que P_r és una aproximació de la identitat radial i decreixent. Anàlogament a la demostració de 1.5.4,

$$\int_{|s|<\delta_0}2P_r(2\pi s)|f(t-s)-f(t)|\mathrm{d}s\leq||2P_r(2\pi\cdot)||_1\sup_{0<\delta<\delta_0}\frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta}|f(s)-f(t)|\mathrm{d}s<2\varepsilon$$

I com que aquest raonament val per qualsevol $\varepsilon>0$, tenim convergència puntual a tots els punts de Lebesgue de f. □

Corol·lari 2.5.4. *Sigui $f\in L^p(\mathbb{T})$, amb $1\leq p<\infty$, i $\tilde f$ definida com a integral singular. Aleshores, $\tilde f$ està ben definida (a $L^{1,\infty}$ si $p=1$ i a L^p si $p>1$), i coincideix amb les definicions anteriors.*

Demostració. En primer lloc, pel lema anterior la integral singular convergeix gairebé arreu a una funció que anomenarem $\tilde f$. D'altra banda, si t és un punt de Lebesgue de f, recuperant la definició anterior de v,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}v((1-2\pi\varepsilon)e^{2\pi it})-\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\cot(\pi s)f(t-s)\mathrm{d}s=0$$

Com que el límit radial de v existeix gairebé arreu, tenim que $\tilde f$ coincideix amb la definició a partir de la conjugada harmònica. □

Capítol 3

La transformada de Hilbert

3.1 Introducció

L'objectiu d'aquest capítol és veure l'equivalència de les diferents definicions de transformada de Hilbert, i enumerar algunes de les seves propietats i la seva relació amb la convergència en norma de la transformada de Fourier.

Definició 3.1.1. Donada $f \in \mathcal{S}$, considerem la seva transformada de Fourier, i definim la seva transformada de Hilbert, $\mathcal{H}f$ com:

$$\mathcal{H}f(t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega)\hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

A més a més, definim les projeccions de Riesz com:

$$P_+(f)(t) = \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$P_-(f)(t) = \int_{-\infty}^{0} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Aquestes tres expressions s'han d'entendre de moment en un sentit formal, i després veurem quan corresponen a funcions a L^p.

Com que un producte de transformades de Fourier correspon a la transformada d'una convolució, podem invertir aquesta transforamda en un sentit formal, i obtenim una convolució amb un nucli que no és integrable. Li donarem un sentit a aquesta expressió més endavant.

$$\mathcal{H}f = \psi * f, \text{ on } \psi(t) = \frac{1}{\pi t}$$

A partir d'aquesta definició, podem escriure tant f com $\mathcal{H}f$ a partir de les projeccions de Riesz, i, similarment, podem recuperar aquestes projeccions a partir d'aquestes dues:

$$f = P_+(f) + P_-(f), \ \mathcal{H}f = i(P_-(f) - P_+(f)),$$

$$P_+(f) = \frac{f + i\mathcal{H}f}{2}, \ P_-(f) = \frac{f - i\mathcal{H}f}{2}.$$

Definició 3.1.2. Tal com hem definit la transformada de Hilbert, denotarem per $\mathcal{H}$ l'operador que envia cada funció a la seva transformada.

Hem de notar que, igual que al capítol anterior podiem definir la conjugació sobre els polinomis trigonomètrics i estendre-la per continuitat, en aquest cas la classe densa que aprofitarem per definir l'operador en primera instància serà la classe de Schwartz, i després podrem estendre aquesta definició als espais L^p on tinguem una acotació de l'operador.

Proposició 3.1.3. *Propietats de la transformada de Hilbert:*

- $\mathcal{H}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{H} f + \beta \mathcal{H} g$.
- $\mathcal{H}^2 = -Id$, $\mathcal{H}^4 = Id$, *de forma que tenim una inversa explícita* $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$.
- $||\mathcal{H} f||_2 = ||f||_2$.
- *Si* f, g *són reals,* $\int f \cdot \mathcal{H} g = -\int \mathcal{H} f \cdot g$, *és a dir,* $\mathcal{H}$ *és un operador hermític.*

Demostració. Les dues primeres són evidents a partir de la definició.

$$||\mathcal{H} f||_2 = ||\mathcal{F}(\mathcal{H} f)||_2 = ||-i\,\mathrm{sgn}(\omega)\hat{f}(\omega)||_2 = ||\hat{f}||_2 = ||f||_2.$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{H}g(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathcal{F}(\overline{\mathcal{H}g})(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{-i\,\mathrm{sgn}(-\omega)\hat{g}(-\omega)}\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} i\,\mathrm{sgn}(\omega)\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} -\mathcal{H}f(t)g(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

3.2 Acotació en norma de la transformada de Hilbert

Els resultats que demostrem en aquesta secció són els teoremes de Kolmogorov i M. Riesz que proven que la transformada de Hilbert és un operador $(1,1)$-feble i fitat a L^p per $1 < p < \infty$, respectivament.

Teorema 3.2.1. $\mathcal{H}$ *és un operador* $(1,1)$*-feble, és a dir, existeix* $C > 0$ *tal que per tota funció* $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$|E_\alpha| = |\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}f(x)| > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha}||f||_1.$$

Demostració. Farem la prova per f real no negativa, i s'estén canviant la constant a funcions amb imatge complexa sense dificultats. En primer lloc fixem α.

Fem la descomposició de Calderón-Zygmund de $f = g + b$. Aleshores tenim que $g \leq 2\alpha$ gairebé arreu i que el suport de b, Ω, és una unió numerable d'intervals Q_n i satisfà $|\Omega| \leq ||f||_1/\alpha$. A més a més, $b, g \leq f$ i també les seves normes a L^1.

$$E_\alpha \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}g(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}b(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} =: G_\alpha \cup B_\alpha.$$

$$|G_\alpha| \leq \frac{4}{\alpha^2}||\mathcal{H}g||_2^2 = \frac{4}{\alpha^2}||g||_2^2 = \frac{4}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\mathrm{d}x \leq \frac{8}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x = \frac{8}{\alpha}||g||_1.$$

Definim I'_n com l'interval amb el mateix centre que I_n i longitud el doble, i Ω' a la seva unió. És clar que $|\Omega'| \leq 2|\Omega| \leq 2||f||_1/\alpha$.

$$|B_\alpha| \leq |\Omega'| + \left|\left\{x \notin \Omega' : |\mathcal{H}b(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leq |\Omega'| + \frac{2}{\alpha}\int_{(\Omega')^c} |\mathcal{H}b(x)|\mathrm{d}x.$$

El que queda per demostrar és que l'última integral està fitada, llevat d'una constant, per $||f||_1$. Podem escriure b com la suma de $b_n := b\chi_{I_n}$, i aleshores queda clar que $|\mathcal{H}b|$ és menor o igual que la suma de $|\mathcal{H}(b_n)|$ si la suma és finita, i gairebé arreu si no, perquè tenim convergència a L^2 d'aquestes sumes parcials.

Si x no pertany a I_n, podem invertir la transformada de Fourier a la definició encara que $b_n \notin \mathcal{S}$ i ens queda

$$\mathcal{H}b_n(x) = \int_{I_n} \frac{b_n(y)}{\pi(x-y)}\mathrm{d}y.$$

Tenint en compte que la integral de b_n és zero, i anomenant c_n al punt mig de I_n,

$$\begin{aligned}\int_{(I'_n)^c} |\mathcal{H}b_n(x)|\mathrm{d}x &= \int_{(I'_n)^c}\left|\int_{I_n}\frac{b_n(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x = \int_{(I'_n)^c}\left|\int_{I_n} b_n(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_n}\right)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{I_n} |b_n(y)|\left(\int_{(I'_n)^c}\frac{|y-c_n|}{|x-y||x-c_n|}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{I_n} |b_n(y)|\left(\int_{(I'_n)^c}\frac{I_n}{|x-c_n|^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{I_n} |b_n(y)|C\mathrm{d}y = C||b_n||_1.\end{aligned}$$

L'última desigualtat ve de veure que $|y - c_n| < |I_n|/2$, $|x - y| > |x - c_n|/2$, i pel que fa al càlcul de C, si anomenem $I_n = [c_n - r_n, c_n + r_n)$,

$$\int_{|x-c_n|>2r_n} \frac{2r_n}{(x-c_n)^2}\mathrm{d}x = 2\int_{r_n}^{\infty}\frac{r_n}{s^2}\mathrm{d}s = 2\left.\frac{-r_n}{s}\right|_{r_n}^{\infty} = 2.$$

Vista aquesta acotació per cadascuna de les b_n, la tindrem també per b i finalment

$$\begin{aligned}|B_\alpha| &\leq |\Omega'| + \frac{2}{\alpha}\int_{(\Omega')^c}|\mathcal{H}b(x)|\mathrm{d}x \leq |\Omega'| + \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2}{\alpha}\int_{(I'_n)^c}|\mathcal{H}b_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{2||f||_1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{N}} 2||b_n|| \leq \frac{C'||f||_1}{\alpha}.\end{aligned}$$

On la constant C' no ens importa. Tenint fitats els conjunts G_α i B_α, recuperem la fita original sobre E_α i hem acabat. □

Corol·lari 3.2.2. *Sigui* $1 < p < \infty$*, Aleshores, existeix* $C_p > 0$ *tal que per tota funció* $f \in L^p(\mathbb{R})$*,*

$$||\mathcal{H}f||_p \leq C_p||f||_p.$$

Demostració. En primer lloc, recordem que $||\mathcal{H}f||_2 = ||f||_2$.

Pel teorema d'interpolació de Marcinkiewicz, per tot $1 < p < 2$, existeix una constant A_p tal que $||\mathcal{H}f||_p \leq A_p||f||_p$.

Ara, si $p > 2$, fem servir un argument de dualitat, i com que $1 < p' < 2$,

$$||\mathcal{H}f||_p = \sup_{||g||_{p'}=1} \left| \int \mathcal{H}f \cdot g \right| = \sup_{||g||_{p'}=1} \left| - \int f \cdot \mathcal{H}g \right| \leq ||f||_p ||\mathcal{H}g||_{p'} \leq ||f||_p A_{p'}.$$

□

Amb aquestes acotacions, podem definir $\mathcal{H}$ a L^p de la manera següent:

Si $p = 1$, considerem una successió $\{f_n\}$ de funcions de $\mathcal{S}$ que convergeix en norma a f, és a dir, $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$. Per tant $\{f_n\}$ és una successió de Cauchy en norma 1. Per l'acotació 1, 1-feble,

$$\lim_{m,n\to\infty} |\{x : |\mathcal{H}f_n - \mathcal{H}f_m| > \varepsilon\}| = 0.$$

Per tant, $\mathcal{H}f_n$ convergeix en mesura a una funció mesurable, que agafarem com a definició de $\mathcal{H}f$.

Si $1 < p < \infty$, ara tenim una acotació forta, i aleshores definint $\{f_n\}$ com abans, $\mathcal{H}f_n$ és una successió de Cauchy en norma p, que convergeix a una funció de L^p que anomenarem $\mathcal{H}f$.

3.3 Convergència de la transformada inversa de Fourier

D'una manera anàloga al que hem fet amb les sumes parcials de la sèrie de Fourier, podem definir unes integrals truncades de la transformada de Fourier que recorden a la fòrmula d'inversió, i veure sota quines condicions i en quin sentit aquestes integrals truncades convergeixen a la funció original.

Definició 3.3.1. Donada una funció $f \in \mathcal{S}$, definim l'operador integral truncat de Fourier com:

$$S_{a,b}f(t) = \int_a^b \hat{f}(\omega) e^{2\pi i t \omega} \mathrm{d}\omega.$$

En particular, si $a = -R, b = R$, $S_{-R,R}$ s'escriu també S_R i correspon a la convolució amb el nucli de Dirichlet en el cas continu.

Aquest operador es pot relacionar amb la transformada de Hilbert de la manera següent: si anomenem M_a a l'operador que correspon a multiplicar puntualment per $e^{2\pi i a t}$, amb la qual cosa es te evidentment $||M_a||_{L^p \to L^p} = 1$ per tot $1 \leq p \leq \infty$.

Proposició 3.3.2.

$$S_{a,b} = \frac{i}{2} \left(M_a \mathcal{H} M_{-a} - M_b \mathcal{H} M_{-b} \right).$$

Demostració. En primer lloc, veiem que la transformada de Fourier de $e^{2\pi i a t} f(t)$ és $\hat{f}(\omega - a)$:

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i a t} f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a t} f(t) e^{-2\pi i \omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i (\omega - a) t} \mathrm{d}t = \hat{f}(\omega - a).$$

Substituint a la definició de $\mathcal{H}$,

$$
\begin{aligned}
M_a \mathcal{H} M_{-a} f &= M_a \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \mathcal{F}(M_{-a} f)(\omega) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega \right) \\
&= M_a \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \hat{f}(\omega + a) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega \right) \\
&= -i e^{2\pi i a t} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \hat{f}(\omega + a) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \hat{f}(\omega + a) e^{2\pi i (\omega + a) t} \mathrm{d}\omega \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega' - a) \hat{f}(\omega') e^{2\pi i \omega' t} \mathrm{d}\omega' \\
S_{a,b} &= \frac{i}{2} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega - a) \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega - b) \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(\omega - a) - \operatorname{sgn}(\omega - b)}{2} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega = \int_a^b \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

□

En principi aquesta és una igualtat formal, que tindrà sentit si totes les integrals que hi ha convergeixen, cosa que passa per funcions $f \in \mathcal{S}$, i, fent servir l'acotació de $\mathcal{H}$, també per funcions de L^p:

Proposició 3.3.3. *Sigui* $1 < p < \infty$. *Aleshores,* $S_{a,b}$ *és un operador fitat de* L^p *a* L^p, *en altres paraules, existeix* $C_p > 0$ *tal que per tota* $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$||S_{a,b} f||_p \leq C_p ||f||_p.$$

Demostració.

$$||S_{a,b} f||_p \leq \frac{1}{2} \left(||M_a \mathcal{H} M_{-a}|| \cdot ||f||_p + ||M_b \mathcal{H} M_{-b}|| \cdot ||f||_p \right) = ||\mathcal{H}|| \cdot ||f||_p.$$

□

Lema 3.3.4. *Sigui* $1 \leq p < \infty$. *Aleshores* $S_R f$ *convergeix a* f *en norma* p, *si i només si existeix* $C_p > 0$ *tal que per tot* $R > 0$,

$$||S_R f||_p \leq C_p ||f||_p.$$

Demostració. Si $S_R f$ convergeix, aleshores, per cada f, $||S_R f||_p$ està fitat, i aplicant el teorema de Banach-Steinhaus, tenim una fita uniforme, independent de f, de manera que $||S_R f||_p \leq C_p ||f||_p$.

Per veure l'altra implicació, en primer lloc, per una funció $g \in \mathcal{S}$ i separant $|t| \leq 1$, $|t| > 1$ i integrant per parts la segona, i tenint en compte que tant $\hat{g}, \hat{g}' \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
||(S_R g - g)(t)||_p &= \left\| \int_{|\omega|>R} \hat{g}(\omega) e^{2\pi i\omega t} \mathrm{d}\omega \right\|_p \\
&\leq \left\| \chi_{[-1,1]}(t) \int_{|\omega|>R} \hat{g}(\omega) e^{2\pi i\omega t} \mathrm{d}\omega \right\|_p + \left\| \chi_{|t|>1} \int_{|\omega|>R} \hat{g}(\omega) e^{2\pi i\omega t} \mathrm{d}\omega \right\|_p \\
&= \left\| \chi_{[-1,1]}(t) \int_{|\omega|>R} \hat{g}(\omega) e^{2\pi i\omega t} \mathrm{d}\omega \right\|_p + \left\| \chi_{|t|>1} \frac{1}{2\pi t} \int_{|\omega|>R} \hat{g}'(\omega) e^{2\pi i\omega t} \mathrm{d}\omega \right\|_p \\
&\leq ||\chi_{[-1,1]}||_p \int_{|\omega|>R} |\hat{g}(\omega)| \mathrm{d}\omega + \left\| \chi_{|t|>1} \frac{1}{2\pi t} \right\|_p \int_{|\omega|>R} |\hat{g}'(\omega)| \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

I aquestes dues últimes integrals tendeixen a zero quan $R \to \infty$. Un cop vista la convergència a $\mathcal{S}$, fem servir la densitat a $L^p(\mathbb{R})$. Per tot $\varepsilon > 0$, existeix $g \in \mathcal{S}$ tal que $||f - g||_p < \varepsilon$.

$$\lim_{R\to\infty} ||S_R f - f||_p \leq \lim_{R\to\infty} (||S_R g - g|| + ||S_R f - S_R g|| + ||g - f||) \leq 0 + C_p \varepsilon + \varepsilon.$$

Com que això val per tot $\varepsilon > 0$, $\lim ||S_R f - f||_p = 0$ per tota funció $f \in L^p(\mathbb{R})$. □

Aplicant aquests dos resultats, queda tancat l'objectiu de la secció:

Teorema 3.3.5. *Sigui* $1 < p < \infty$, *i* $f \in L^p(\mathbb{R})$. *Aleshores,*

$$\lim_{R\to\infty} ||S_R f - f||_p = 0.$$

3.4 La transformada de Hilbert com a integral singular

Definició 3.4.1. Anomenem distribució valor principal de $1/t$ a l'element de $\mathcal{S}'$ definit per cada $f \in \mathcal{S}$ com a

$$\text{v.p.}\frac{1}{t}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t,$$

i denotarem $\psi = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\frac{1}{t}$.

La motivació per introduir aquesta distribució és doble. Per una part, és la distribució temperada més senzilla que admet una representació amb una singularitat, i serveix com a model per estudiar integrals amb singularitats. Per altra part, calculem la seva transformada de Fourier, veiem que ens serveix per definir la transformada de Hilbert d'una altra manera.

Definició 3.4.2. Donada $f \in \mathcal{S}$, definim la seva transformada de Hilbert $\mathcal{H}f$ com:

$$\mathcal{H}f(t) = \psi * f = \frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} f(t-s) \mathrm{d}s$$

Lema 3.4.3. *Sigui* $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_{\varepsilon<|\omega|<1/\varepsilon} \frac{\sin(2\pi\omega t)}{\omega} \mathrm{d}\omega$$

és uniformement fitada, i el seu límit quan $\varepsilon \to 0^+$ *val* $\pi \operatorname{sgn}(t)$.

Demostració. En primer lloc, veurem que existeix $C > 0$ tal que per tots $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq C.$$

Suposem que $2\pi < a < b$. Siguin α, β enters positius tals que $|a - 2\pi\alpha| \leq \pi, |b - 2\pi\beta| \leq \pi$. Per una part com que $|\sin(t)/t| \leq 1$ podem fitar les integrals entre a i $2\pi\alpha$, i $2\pi\beta$ i b. Per l'altra, aprofitem que el sinus va canviant de signe, i aleshores podem canviar el denominador pel seu valor mínim quan el numerador és positiu i màxim quan el numerador és negatiu, per obtenir una fita superior.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| &\leq \left| \int_a^{2\pi\alpha} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{2\pi\alpha}^{2\pi\beta} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{2\pi\beta}^{b} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t + \pi + \pi \\
&\leq \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{2k\pi} \mathrm{d}t + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{2(k+1)\pi} \mathrm{d}t \right) + 2\pi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + 2\pi < \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + 2\pi = \frac{1}{4\pi} + 2\pi.
\end{aligned}$$

Ara, si considerem valors $0 \leq a < b$, si $a > 2\pi$ ens val l'acotació que hem fet abans i si $a \leq 2\pi$,

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_a^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{2\pi}^{b} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq (2\pi - a) + \frac{1}{4\pi} + 2\pi \leq 4\pi + \frac{1}{4\pi}.$$

I finalment, per aplicar-ho a valors aribtraris de a i b, tenint en compte que $\sin(t)/t$ és una funció parella, si a i b tenen signes diferents escrivim $[a, b] = [a, 0] \cup [0, b]$ i

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_a^{0} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{0}^{b} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq 2\left(4\pi + \frac{1}{4\pi}\right).$$

El següent pas és definir, per $s \geq 0$,

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-st} \mathrm{d}t.$$

Pel teorema de la convergència dominada, $F(s)$ és derivable per $s > 0$, i, a més a més, podem entrar la derivada dins del signe integral. A més a més, fent servir el que hem vist abans, sabem que $F(s)$ ha de ser continua al zero.

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \int_0^\infty -\sin(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(s+i)t} - e^{-(s-i)t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i(s+i)} - \frac{1}{2i(s-i)} = \frac{4}{-4(s^2+1)} = -\frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Amb això, i el fet que $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$, tenim que $F(s) = \pi/2 - \arctan(s)$, i $F(0) = \pi/2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\omega t)}{\omega} \mathrm{d}\omega = 2\operatorname{sgn}(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\omega|t|)}{\omega} \mathrm{d}\omega = 2\operatorname{sgn}(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega')}{\omega'} \mathrm{d}\omega' = \pi \operatorname{sgn}(t).$$

□

Teorema 3.4.4. *Sigui $f \in \mathcal{S}$. Aleshores, $\mathcal{H}f$ està ben definida i coincideix amb la definició anterior.*

Demostració.

$$\begin{aligned} \left| \int_{|s|>\varepsilon} \frac{1}{\pi s} f(t-s) \mathrm{d}s \right| &\leq \left| \int_{\varepsilon<|s|\leq 1} \frac{f(t-s)-f(t)}{\pi s} \mathrm{d}s \right| + \left| \int_{|s|>1} \frac{1}{\pi s} f(t-s) \mathrm{d}s \right| \\ &< \frac{2}{\pi} \left(||f'||_\infty + ||f||_1 \right). \end{aligned}$$

On hem fet servir que $1/(\pi s)$ és una funció senar i per tant te integral zero a $\varepsilon < |s| \leq 1$. Per veure que el límit puntual existeix, separem la integral igual que abans, i observem que

$$\frac{f(t-s)-f(t)}{\pi s}$$

és una funció continua. Per tant, per $f \in \mathcal{S}$, $\mathcal{H}f$ està ben definida. Ara, calculem la transformada de Fourier de la distribució:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \frac{1}{t} \right)(f) &= \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \frac{1}{t} (\hat{f}) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|\omega|>\varepsilon} \frac{\hat{f}(\omega)}{\omega} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon<|\omega|<1/\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon<|\omega|<1/\varepsilon} \frac{e^{2\pi i \omega t}}{\omega} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{-i}{\pi} \int_{\varepsilon<|\omega|<1/\varepsilon} \frac{\sin(2\pi\omega t)}{\omega} \mathrm{d}\omega \right] \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ara, pel lema anterior i aplicant el teorema de la convergència dominada, podrem acabar el càlcul, i ens queda:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \frac{1}{s} \right)(f)(t) = (-i \operatorname{sgn}(\cdot))(f)(t)$$

I per tant, la definició com a integral singular coincideix amb la que hem donat al principi del capítol a $\mathcal{S}'$. □

Ara, volem veure sota quines condicions podem estendre també aquesta definició a L^p. Per això, en primer lloc, definim l'operador integral singular truncat:

Definició 3.4.5. Sigui $f \in \mathcal{S}$, aleshores denotem $\mathcal{H}_\varepsilon$ com

$$\mathcal{H}_\varepsilon(f) = \frac{1}{\pi} \int_{|s|>\varepsilon} \frac{1}{s} f(t-s) \mathrm{d}s$$

Per definició, $\mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}$ a $\mathcal{S}'$. El que veurem a continuació és que també tenim convergència com a operador de L^p a L^p, per $1 < p < \infty$, i de L^1 a $L^{1,\infty}$, i amb això acabarem d'establir l'equivalència amb la definició que hem donat al principi del capítol.

En primer lloc, com que $\chi_{|s|>\varepsilon}\frac{1}{s}$ pertany a L^q per tot $q > 1$, $\mathcal{H}_\varepsilon$ està ben definit de $L^{q'}$ en ell mateix, és a dir, per tot L^p amb $1 \leq p < \infty$.

A més a més, les acotacions que hem fet per $\mathcal{H}$ també valen per $\mathcal{H}_\varepsilon$, amb constants que no depenen de ε.

Proposició 3.4.6. *$\mathcal{H}_\varepsilon$ és un operador fitat de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostració. Sigui $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sabent que la transformada de Fourier és una isometria de L^2, si continuem anomenant $\psi(t) = 1/(\pi t)$,

$$||\mathcal{H}_\varepsilon f||_2 = \left\|\left(\psi\chi_{|t|>\varepsilon}\right) * f\right\|_2 = \left\|\mathcal{F}\left(\psi\chi_{|t|>\varepsilon}\right)\hat{f}\right\|_2 \leq \left\|\mathcal{F}\left(\psi\chi_{|t|>\varepsilon}\right)\right\|_\infty ||f||_2.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t}\chi|t| > \varepsilon\right)(\omega) &= \int_{|t|>\varepsilon}\frac{1}{\pi t}e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t = \lim_{K\to\infty}\int_{\varepsilon<|t|<K} -i\frac{\sin(2\pi\omega t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{K\to\infty} -2i\,\mathrm{sgn}(\omega)\int_{2\pi\varepsilon|\omega|}^{2\pi K|\omega|}\frac{\sin(t')}{t'}\mathrm{d}t'.\end{aligned}$$

I pel lema 3.4.3 aquesta última està uniformement fitada, d'on deduïm $||\mathcal{H}_\varepsilon f||_2 \leq C||f||_2$. □

Un cop vist el cas de L^2, l'acotació $(1,1)$-feble es demostra igual que hem fet per l'operador $\mathcal{H}$, i per interpolació surt la resta.

Per tota funció $f \in L^p$, $\mathcal{H}_\varepsilon f$ convergeix, en norma si $p > 1$ i en mesura si $p = 1$, a una funció que coincideix amb la definició anterior de $\mathcal{H}f$, ja que vista l'acotació, podem agafar $\{f_n\}$ una successió de funcions de $\mathcal{S}$ tals que $\lim ||f_n - f||_p = 0$, i

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}_\varepsilon f = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}_\varepsilon f_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}_\varepsilon f_n = \lim_{n\to\infty}\mathcal{H}f_n.$$

Per estudiar la convergència puntual de $\mathcal{H}_\varepsilon f$ per funcions $f \in L^p$, farem servir el teorema 1.2.14 i definirem l'operador maximal

$$\mathcal{H}^* f = \sup_{\varepsilon>0}|\mathcal{H}_\varepsilon f|.$$

Teorema 3.4.7. *Sigui $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, aleshores existeix $C > 0$ tal que*

$$\mathcal{H}^* f(x) \leq \mathcal{M}(\mathcal{H}f)(x) + C\mathcal{M}f.$$

Demostració. Sigui $M_\varepsilon(x)$ com a la proposició 1.9.3, recordem $M_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty$, és no negativa, radial i decreixent, i te integral 1. Anomenant $\xi(x) = \text{v.p.}\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{y}\chi_{|y|>\varepsilon} = \left(M_\varepsilon * \xi\right)(y) + \left[\frac{1}{y}\chi_{|y|>\varepsilon} - \left(M_\varepsilon * \xi\right)(y)\right].$$

Per 1.5.4 i l'associativitat de les convolucions, la convolució del primer sumand amb f està fitada per $\mathcal{M}(\mathcal{H}f)$. Per al segon, podem fer el càlcul per $\varepsilon = 1$ i després canviar y per y/ε.

Per $|y| > 1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y}-\int_{|x|<1/2}\frac{M_1(x)}{y-x}\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{|x|<1/2}M_1(x)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-x}\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_{|x|<1/2}\frac{M_1(x)|x|}{|y||y-x|}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{y^2}.\end{aligned}$$

A l'última desigualtat hem fet servir que $|y-x| \geq |y|/2$, $|x| < 1/2$, i l'integral de M_1 és 1. D'altra banda, per $|y| < 1$,

$$\left|-\lim_{\delta\to 0^+}\int_{|x|>\delta}\frac{M_1(y-x)}{x}\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{-3/2}^{3/2}\frac{M_1(y-x)-M_1(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \leq C_1.$$

I aquí hem fet servir que M_1 te derivada continua de suport compacte. En qualsevol dels dos casos,

$$\left|\frac{1}{y}\chi_{|y|>\varepsilon}-(M_\varepsilon * \xi)(y)\right| \leq \frac{C_2}{1+y^2}.$$

Per tant, la convolució amb f està fitada per $C\mathcal{M}f$, i tenint en compte el canvi d'escala també. □

Corol·lari 3.4.8. *Sigui* $1 < p < \infty$. *Existeix* $C_p > 0$ *tal que per tota* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $||\mathcal{H}^*f||_p \leq C_p||f||_p$.

Demostració. Directa a partir de l'acotació forta dels operadors $\mathcal{H}$ i $\mathcal{M}$. □

Teorema 3.4.9. $\mathcal{H}^*$ *és un operador* $(1,1)$*-feble.*

Demostració. Suposem f real no negativa i fem una descomposició de Calderón-Zygmund igual que al teorema 3.2.1. Aleshores, $f = g + b$ i la part g es tracta igual que allà, fent servir el corol·lari anterior. Ens queda, per tant, si Ω és el suport de b, veure que

$$\left|\left\{x \notin \Omega' : |\mathcal{H}^*b(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leq \frac{C}{\alpha}||b||_1.$$

Descomposem b com la suma de b_n, i fixant $x \notin \Omega'$, $\varepsilon > 0$, per cada b_n amb suport I_n poden passar tres coses:

- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq I_n$. Aleshores, $\mathcal{H}_\varepsilon b_n(x) = 0$.
- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I_n = \emptyset$. Aleshores, $\mathcal{H}_\varepsilon b_n(x) = \mathcal{H}b_n(x)$. Ara, si denotem c_n el centre de I_n, fent servir que b_n té mitjana zero, recuperem l'acotació que vam fer servir a 3.2.1

$$|\mathcal{H}b_n(x)| \leq \int_{I_n}|b_n(y)|\frac{|I_n|}{|x-c_n|^2} = \frac{|I_n|}{|x-c_n|^2}||b_n||_1.$$

- $x-\varepsilon$ o $x+\varepsilon$ pertanyen a I_n. Com a molt, això passa per dos intervals. En aquest cas, com que $x \notin \Omega'$, $I_n \subset (x-3\varepsilon, x+3\varepsilon)$, $|x-y| > \varepsilon/3$, per tot $y \in I_n$. Per tant,

$$|\mathcal{H}_\varepsilon b_n(x)| \leq \int_{I_n}\frac{|b_n(y)|}{|x-y|}\mathrm{d}y \leq \frac{3}{\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon}|b_n(y)|\mathrm{d}y \leq C\mathcal{M}b_n(x).$$

Sumant sobre n i fent el suprem sobre ε queda

$$\mathcal{H}^*b(x) \leq \sum_n \frac{I_n}{|x-c_n|^2}||b_n||_1 + C\mathcal{M}b(x),$$

$$B_\alpha = \left\{x \notin \Omega' : |\mathcal{H}^*b(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\},$$

$$\begin{aligned} |B_\alpha| &\leq \left|\left\{x \notin \Omega' : \sum_n \frac{I_n}{|x-c_n|^2}||b_n||_1 > \frac{\alpha}{4}\right\}\right| + \left|\left\{x \notin \Omega' : |\mathcal{M}\mathcal{H}b(x)| > \frac{\alpha}{2C}\right\}\right| \\ &\leq \frac{4}{\alpha}\sum_n \int_{(I'_n)^c} \frac{I_n}{|x-c_n|^2}||b_n||_1 + \frac{C_1}{\alpha}||b||_1 \leq \frac{C}{\alpha}||b||_1. \end{aligned}$$

□

A partir d'aquests dos resultats, podem aplicar el teorema 1.2.14 per deduir que si $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, aleshores $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f = \mathcal{H}f$ gairebé arreu.

3.5 Relació amb el nucli de Poisson conjugat

Definició 3.5.1. Anomenarem semiplà superior, o simplement semiplà, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$.

Definició 3.5.2. Anomenem nucli de Poisson a la funció del semiplà $\mathbb{H}$, fent $z = x + iy$,

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \; x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

L'origen d'aquesta expressió el podem trobar intentant translladar la representació de funcions harmòniques al disc que hem trobat al capítol anterior al semiplà. En primer lloc, recordem que si composem una funció harmònica amb funcions holomorfes continuarà sent harmònica, i definim la següent bijecció, que és holomorfa a $\mathbb{D}$:

$$m : \mathbb{D} \to \mathbb{H}, \; m(z) = i\frac{1-z}{1+z}.$$

El primer que hem de fer és veure que efectivament envia el disc al semiplà. Donat $z = re^{2\pi it}$ del disc,

$$m(z) = \frac{i-zi}{1+z} = \frac{(i-zi)(1+\overline{z})}{1+|z|^2} = \frac{i(1-z+\overline{z}-|z|^2)}{1+|z|^2}.$$

I $\Im m(z) > 0$ si i només si $\Re(1-z+\overline{z}-|z|^2) = 1 - r\cos(2\pi t) + r\cos(2\pi t) - r^2 > 0$, que tenim perquè $r < 1$.

D'altra banda, $m^{-1}(z) = (i-z)/(i+z)$, que envia $\mathbb{H}$ a $\mathbb{D}$ perquè, si $\Im z > 0$, $|i-z| < |i+z|$.

Ara que tenim una forma d'anar i tornar del disc al semiplà, agafem la nostra integral de Poisson al disc i la transportem:

$$u_D(re^{2\pi it}) = \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi s')} f_D(t-s')\mathrm{d}s'.$$

Volem trobar una funció harmònica u a $\mathbb{H}$ amb uns valors a la recta real determinats per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Aleshores, portem aquests valors de frontera al disc, calculem la integral de Poisson al disc i tornem al semiplà. Tindrem $u = u_D \circ m^{-1}$, i $f_D(t) = f(m(e^{2\pi it}))$

$$m(e^{2\pi it}) = i\frac{1-e^{2\pi it}}{1+e^{2\pi it}} = i\frac{e^{-\pi it}-e^{\pi it}}{e^{-\pi it}+e^{\pi it}} = \tan(\pi t).$$

Fent el canvi de variables $s = \tan(\pi(t-s'))$, $\mathrm{d}s = -\pi(1+s^2)\mathrm{d}s'$,

$$s' = t - \frac{\arctan(s)}{\pi} \Rightarrow \cos(2\pi s') = \cos(2\pi t - 2\arctan(s)),$$

$$\begin{aligned} u_D(z) &= \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi s')} f_D(t-s')\mathrm{d}s' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\pi(1-r^2)(1+s^2)}{1+r^2-2r\cos(2\pi t-2\arctan(s))} f(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

$$re^{2\pi it} = m^{-1}(z) = m^{-1}(x+iy) = \frac{-x+(1-y)i}{x+(1+y)i},$$

$$r = \sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2}},\ 2\pi t = \arctan\frac{y-1}{x} - \arctan\frac{y+1}{x}.$$

Substituint-ho tot a la integral i fent servir identitats trigonomètriques, acabem tenint

$$u(x+iy) = u_D(m^{-1}(x+iy)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi((x-s)^2+y^2)} f(s)\mathrm{d}s.$$

Igual que al disc, direm que u és la integral de Poisson de f si

$$u(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)P_y(x-s)\mathrm{d}s.$$

Proposició 3.5.3. *Sigui $y>0$, aleshores*

$$P_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

és una aproximació positiva de la identitat quan $y \to 0^+$.

Demostració. En primer lloc, $P_y(x) \geq 0$ perquè és un quocient de dos termes positius.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_y(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi((x/y)^2+1)}\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{y}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Finalment, veiem que la integral sobre complementaris d'entorns del 0 tendeix a zero quan fem $y \to 0^+$.

$$\int_{|x|>\delta} P_y(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|>\delta} \frac{1}{\pi((x/y)^2+1)}\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}\bigg|_{\delta}^{\infty} = \pi - 2\arctan\frac{\delta}{y} \to 0.$$

□

Proposició 3.5.4. *Sigui $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, i u la seva integral de Poisson. Considerem $y>0$ fix, $g(x) = u(x+iy)$. Aleshores u és harmònica a $\mathbb{H}$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ i $||g||_p \leq ||f||_p$.*

Demostració. Per veure que u és harmònica, ens remetem al resultat sobre el disc i que una transformació conforme respecta l'harmonicitat de les funcions.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)P_y(x-s)\mathrm{d}s,$$

$$||g||_p = ||f * P_y||_p \le ||f||_p ||P_y||_1 = ||f||_p.$$

Es tracta d'aplicar directament que el nucli de Poisson és una aproximació de la identitat positiva. $\square$

Amb una deducció similar a la del nucli de Poisson, ens podem portar el nucli conjugat al semiplà i fer-lo servir per calcular conjugades harmòniques. No obstant, és més fàcil deduir-ne la seva expressió fent servir que $P_y + iQ_y$ ha de ser una funció holomorfa:

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} = \Re\frac{y+ix}{\pi(x^2+y^2)} = \Re\frac{i}{\pi(x+iy)},$$

$$Q_y(x) = \Im\frac{i}{\pi(x+iy)} = \frac{x}{\pi(x^2+y^2)}.$$

Igual que abans, el nucli conjugat no és positiu, no és una aproximació de la identitat, i no està fitat a L^p quan $y \to 0^+$. Anomenarem integral conjugada de Poisson a l'expressió següent, que serà la funció conjugada harmònica de la integral de Poisson al semiplà:

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)Q_y(x-s)\mathrm{d}s.$$

Preliminarment, observem que el límit puntual del nucli de convolució que estem fent servir quan fem $y \to 0^+$ és el mateix que apareix a la transformada de Hilbert. En aquest sentit, ens interessaria escriure

Definició 3.5.5. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció de la classe de Schwartz, $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ la seva integral de Poisson, i v la integral conjugada de Poisson de f. Aleshores, definim:

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{y\to 0^+} v(x+iy).$$

L'objectiu d'aquesta secció serà veure l'equivalència d'aquesta definició amb les anteriors, establint per tant la mateixa acotació per l'operador i la seva extensió a L^p.

Teorema 3.5.6. *Sigui* $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$. *Aleshores,* $\mathcal{H}f$ *està ben definida i coincideix amb la definició anterior.*

Demostració. Com que hem vist que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f = \mathcal{H}f$, serà suficient demostrar que

$$\limsup_{y\to 0^+} |h(x)| := \limsup_{y\to 0^+} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\left(Q_y(x) - \frac{1}{\pi}\chi_{|x|>y}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}s\right| = 0.$$

gairebé per tot x, i que $h(x)$ tendeix a zero en norma.

$$\begin{aligned}
\pi h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sf(x-s)}{y^2+s^2}\mathrm{d}s - \int_{|s|>y} \frac{f(x-s)}{s}\mathrm{d}s \\
&= \int_{|s|\leq y} \frac{sf(x-s)}{y^2+s^2}\mathrm{d}s + \int_{|s|>y} \left(\frac{s}{y^2+s^2} - \frac{1}{s}\right) f(x-s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \left(\frac{s}{s^2+y^2}\chi_{|s|\leq y} - \frac{y^2}{s(s^2+y^2)}\chi_{|s|>y}\right) \mathrm{d}s =: f * k_y.
\end{aligned}$$

Ara, veiem que $k_y(s) = k_1(s/y)/y$ és una aproximació generalitzada de la identitat quan $y \to 0^+$: és un reescalament d'una funció integrable (és fàcil veure que $|k_1(s)| \leq (1+s^2)^{-1}$), i que te integral zero per ser senar. Per tant, aplicant el teorema 1.3.9, tenim la convergència en norma a zero de $h(x)$.

Per veure la convergència puntual, definirem l'operador maximal $h^* f(x) = \sup_{y>0} |f * k_y(x)|$.

$$\begin{aligned}
|k_1(s)| &\leq \frac{1}{1+s^2},\ |k_y(s)| \leq \frac{1}{y}\frac{1}{1+(s/y)^2}, \\
h^* f(x) &\leq \sup_{y>0} |f| * \frac{y}{s^2+y^2} \leq \mathcal{M}f(x) \left\| \frac{1}{s^2+1} \right\|_1 .
\end{aligned}$$

A l'última desigualtat hem fet servir que $(1+s^2)^{-1}$ és de L^1, no negativa, radial i decreixent, i per tant, tenim una acotació (feble si $p=1$, forta en els altres casos) de h^* que ens permet aplicar 1.2.14 per demostrar la convergència puntual μ-g.a. $\square$

Bibliografia

[1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[2] Javier Duoandikoetxea Zuazo. *Análisis de Fourier*. Universidad Autónoma de Madrid., 1995.

[3] José García-Cuerva and JL Rubio De Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116. Elsevier, 2011.

[4] John Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 236. Springer Science & Business Media, 2007.

[5] Loukas Grafakos. *Classical fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.